ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:

ΘΕΜΑ Α3: Σ-Σ-Λ-Σ-Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $|z-2|=|\bar{z}+2|=|z+2| \Leftrightarrow x=0$, δηλ. $z=\beta i$

Β2. $|w-i|=|w-2i| \Leftrightarrow y=\frac{3}{2}$, δηλ. $w=a+\frac{3}{2}i$

Β3.

Είναι $|z-w|=\sqrt{a^2+\left(\beta-\frac{3}{2}\right)^2}=\left(\text{αφού } |\beta|=\alpha\right)=\sqrt{\beta^2+\left(\beta-\frac{3}{2}\right)^2}$.

Θέτω $f(x)=\sqrt{x^2+\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}$, παραγωγίζω και βρίσκω ελάχιστο για $x=\beta=\frac{3}{4}$, την τιμή $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. Οπότε προκύπτουν οι μιγαδικοί $z=\pm\frac{3}{4}i$ και $w=\pm\frac{3}{4}+\frac{3}{2}i$.

Β4.

Για $\beta>0$, $|z+w|^2-3|z|>2 \Leftrightarrow |\beta i+a+\frac{3}{2}i|^2-3|\beta|>2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow a^2+\beta^2+\frac{1}{4}>0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$f'(x)=e^{x-1}\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$. Θέτω $h(x)=\ln x+\frac{1}{x}$, $h'(x)=\frac{x-1}{x^2}$, έχει ελάχιστο για $x=1, h(1)=1$ άρα $h(x)>0$, συνεπώς f γνήσια αύξουσα με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

Γ2.

$f''(x)=e^{x-1}\left(\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$. Θέτω $g(x)=x^2\ln x+2x-1$, $g'(x)=2x\ln x+x+2$,

$g''(x)=2\ln x+3$, $g'(x)\geq 2\left(1-e^{-\frac{3}{2}}\right)>0$ ... άρα $g(x)>0$ για $x\geq e$, συνεπώς $f''(x)>0$,

f κυρτή στο $[e,+\infty)$

Γ3.

Είναι $g(x)=e^{x^2}\left(x^2-5x+6\right)$ και οι δοσμένες ανισώσεις γράφονται:

$g(x)\geq g(a)$ $\forall x\in(0,1)$ και $g(x)\leq g(\beta)$ $\forall x\in(1,+\infty)$. Εφαρμόζουμε θεώρ. Fermat και προκύπτει ότι $g'(a)=g'(\beta)=0$, οπότε με θεώρ. Rolle στο (α,β), προκύπτει ότι $\exists\,\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $g''(\xi)=0$.

Γ4.

Είναι $h(x)=e^{x-1}\left(x^2-1\right)$, $h''(x)=e^{x-1}\left(x^2+4x+1\right)>0$, άρα h κυρτή και η εφαπτομένη της στο 2 είναι η ευθεία $y=7ex-11e$, οπότε $h(x)\geq 7ex-11e$, συνεπώς το εμβαδόν είναι: $E=\int_3^4(e^{x-1}\left(x^2-1\right)-7ex+11e)dx=...=\left[e^{x-1}\left(x-1\right)^2-\frac{7ex^2}{2}+11ex\right]_3^4=...$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$f\searrow$, άρα $f\circ f$ γν. αύξουσα, οπότε $x\geq 0\Leftrightarrow f(f(x))\geq f(f(0))\xrightarrow{\text{συν}x>0}$ $\text{συν}x\cdot f(f(x))\geq \text{συν}x\cdot f(f(0))$ και ολοκληρώνοντας, το 2ο μέλος γίνεται ίσο με: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{συν}x\cdot f(f(0))\,dx=f(f(0))\cdot\left[\text{ημ}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=f(f(0))$, άρα $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{συν}x\cdot f(f(x))\,dx\geq f(f(0))$

Επειδή η συνάρτηση g είναι περιττή, το

$\int_{-x}^{x}g\left(t\right)dt=\int_{-x}^{0}g(t)dt+\int_0^x g(t)dt=...=0$, άρα και το όριο δίνει 0.

Δ2. Θέτω $K(x)=\int_\alpha^x f(t)dt\cdot\int_\beta^x g(t)dt$. Εφαρμόζω Θεώρημα Rolle για αυτήν και προκύπτει ότι υπάρχει ξ στο (α, β) ώστε K΄(ξ)=0, από όπου αλλάζοντας πρόσημο και άκρα στο 2ο ολοκλήρωμα, προκύπτει το ζητούμενο.

Δ3. Θέτω $G(x)=\int_\alpha^x f(t)dt-\int_\alpha^x g(t)dt$. Η G(x) είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο [α,η], G(α)=G(η)=0 , άρα από Θεώρημα Rolle, υπάρχει c στο (α, η) ώστε G΄(c)=0, άρα f(c)=g(c).

Δ4.

i. Είναι $G(1)=H(1)=0$ και $G'(x)=H'(x)=\frac{1}{x}\int_1^x f(u)du$ συνεπώς $G(x)=H(x)$.

ii. Για $x>1\xrightarrow{f\searrow}f(x)<f(1)<0$, και $G''(x)=\frac{xf(x)-\int_1^x f(t)dt}{x^2}$, ονομάζω $T(x)=xf(x)-\int_1^x f(t)dt$, οπότε $T'(x)=xf'(x)<0$, $T(x)\searrow$, άρα αν $x>1$ είναι $T(x)<T(1)=0$, άρα $G''(x)<0$ συνεπώς G' γνήσια φθίνουσα.