Βασικοί κανόνες πρόσθεσης και πολ/σμού ρητών αριθμών

Ομόσημοι: Οι αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο.
Ετερόσημοι: Οι αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο.

Απόλυτη τιμή ενός αριθμού, ονομάζουμε την απόστασή του στον άξονα από το μηδέν. Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού, είναι πάντα θετικός αριθμός με εξαίρεση το |0|=0.

Για να *προσθέσω* δύο *ομόσημους* αριθμούς, προσθέτω τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα κρατάω το ίδιο πρόσημο με τους αριθμούς.

$5+7=12,\ (-3)+(-2)=-5,\ (-4)+(-3)=-7,\ 8+5=13$

Για να *προσθέσω* δύο *ετερόσημους* αριθμούς, αφαιρώ τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα κρατάω το πρόσημο εκείνου που είχε τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

$7+(-5)=2,\ \ 8+(-11)=-3,\ \ (-7)+4=-3,\ \ -6+10=4,\ \ -9+6=-3$

Σειρά σας τώρα:

$(-7)+(-3)=$ $\qquad (-6)+(+5)=$ $\qquad (+7)+(+4)=$ $\qquad -5+12=$

$7+(-9)=$ $\qquad 10+(-12)=$ $\qquad 8+(-4)=$ $\qquad -10+9=$

$-5+(-3)=$ $\qquad -8+(-4)=$ $\qquad 5+(+11)=$ $\qquad -2+(-4)=$

Αφαίρεση είναι η πρόσθεση του αντίθετου, δηλαδή, αν έχουμε να κάνουμε την πράξη α-β, τη μετατρέπουμε σε πρόσθεση: α+(-β).

Δείτε τα παρακάτω παραδείγματα:

$(-7)-(-3)=(-7)+(+3)=-4$ $\qquad (-6)-(+5)=(-6)+(-5)=-11$

$10-(-12)=10+(+12)=22$ $\qquad 8-(-4)=8+(+4)=12$

$-8-(+3)=-8+(-3)=-11$ $\qquad -10-(-4)=-10+(+4)=-6$

Σειρά σας και πάλι:

$(-5)-(-4)=$ $\qquad (-9)-(+7)=$

$9-(-11)=$ $\qquad 12-(-7)=$

$-10-(+6)=$ $\qquad -11-(-7)=$

Προσπαθήστε και με τις παρακάτω συνδυάζοντας κατάλληλα όσα ξέρετε:

$-7+(-4)+5+(-8)=$ $\qquad 5+(-9)+(-4)+11=$

$-6-(+7)-(-8)+(-4)=$ $\qquad 9-(-6)-(+10)-(+1)=$

Απαλοιφή παρενθέσεων: **Για να βγάλουμε μια παρένθεση, αν έχει μπροστά της θετικό πρόσημο, την παραλείπουμε μαζί με το πρόσημο και γράφουμε όλους τους αριθμούς που είχε μέσα με ό,τι πρόσημο είχαν.** Δείτε:
(5-3-2)+(-4+1)+(5-8+3)=5-3-2-4+1+5-8+3
$(-5+1)+(-1-2)+(4-3)+(-2+1)=-5+1-1-2+4-3-2+1$
Αν το πρόσημο μπροστά από την παρένθεση είναι (-), τότε παραλείπουμε το πρόσημο και την παρένθεση και γράφουμε ό,τι υπήρχε μέσα με αλλαγμένο πρόσημο. Δείτε:
-(3-7)-(-4+3)-(8+7)-(-3-2)=-3+7+4-3-8-7+3+2

Παρατηρήστε τώρα πως εφαρμόζονται οι παραπάνω κανόνες αν στις παρενθέσεις υπάρχουν γράμματα:
$(\alpha-\beta)-(\gamma-\alpha)+(\beta-\alpha)-(-\alpha+\beta)=\alpha-\beta-\gamma+\alpha+\beta-\alpha+\alpha-\beta$
$-(\alpha-\beta)-(-\gamma+\beta)+(\gamma-\alpha)-(\alpha+\beta)=-\alpha+\beta+\gamma-\beta+\gamma-\alpha-\alpha-\beta$

- Αν έχουμε άθροισμα ή διαφορά πολλών όρων, προτιμούμε να χωρίσουμε θετικούς από αρνητικούς και να κάνουμε τις πράξεις μεταξύ τους, για παράδειγμα:
  $-5+7+3-11-2-4+6+9-8=$
  $(7+3+6+9)-(5+11+2+8)=25-(+26)=25-26=-1$

Πολλαπλασιασμός (διαίρεση) ομόσημων: **Πολ/ζουμε (ή διαιρούμε) τις απόλυτες τιμές τους και βάζουμε θετικό πρόσημο στο αποτέλεσμα.**
$-3\cdot(-4)=12,\quad (-2)\cdot(-7)=14,\quad (+4)\cdot(+5)=20,\quad (-20):(-4)=5$

Πολλαπλασιασμός (διαίρεση) ετερόσημων: **Πολ/ζουμε (ή διαιρούμε) τις απόλυτες τιμές τους και βάζουμε αρνητικό πρόσημο στο αποτέλεσμα.**
$-3\cdot 7=-21,\quad 7\cdot(-4)=-28,\quad -12:(+4)=-3,\quad -20:(+5)=-4$

Ιδιότητες πράξεων σε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό:
$\alpha+\beta=\beta+\alpha \qquad \alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$ (αντιμεταθετική)
$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma \qquad \alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$ (προσεταιριστική)
$\alpha+0=\alpha \qquad \alpha\cdot 1=\alpha$ (ουδέτερο στοιχείο)
$\alpha+(-\alpha)=0$ (αντίθετος) $\qquad \alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1$ (αντίστροφος αριθμός)

Επιμεριστική ιδιότητα:
$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \alpha\cdot(\beta-\gamma)=\alpha\beta-\alpha\gamma$

Γινόμενο πολλών παραγόντων: Αν το πλήθος των αρνητικών είναι άρτιος (ζυγός) αριθμός, το αποτέλεσμα έχει θετικό πρόσημο, ενώ αν το πλήθος των αρνητικών είναι περιττός (μονός) το αποτέλεσμα έχει αρνητικό πρόσημο.

- Δεν επιτρέπεται η διαίρεση με το μηδέν, αλλά $\alpha\cdot 0=0$.
- Αντίθετοι: Αριθμοί με άθροισμα 0, Αντίστροφοι: Αριθμοί με γινόμενο 1.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΕΚΘΕΤΗ ΑΚΕΡΑΙΟ

Ισχύει ότι: $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}$ και $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$, όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Ιδιότητες δυνάμεων:

- $\alpha^{\nu} \cdot \alpha^{\kappa} = \alpha^{\nu+\kappa}$ π.χ. $:5^3 \cdot 5^4 = 5^7$, $2^{-6} \cdot 2^4 = 2^{-2}$, $3^{-1} \cdot 3^{-5} = 3^{-6}$
- $(\alpha^{\nu})^{\kappa} = \alpha^{\nu \cdot \kappa}$, π.χ.: $(\alpha^{-1})^{-2} = \alpha^2$, $(3^{-2})^3 = 3^{-6}$
- $\frac{\alpha^{\nu}}{\alpha^{\kappa}} = \alpha^{\nu-\kappa}$, π.χ.: $\frac{3^5}{3^2} = 3^3$, $\frac{\alpha^3}{\alpha^{-2}} = \alpha^5$.
- $(\alpha\beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu}$ και $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$

Παρατήρηση που αφορά το πρόσημο:

Η μόνη περίπτωση το αποτέλεσμα μιας δύναμης να είναι αρνητικός αριθμός, είναι να *υψώνουμε αρνητικό αριθμό σε περιττό (μονό) εκθέτη*. Σε κάθε άλλη περίπτωση, το αποτέλεσμα είναι θετικός αριθμός ! Δείτε τα παρακάτω παραδείγματα υπολογισμού δυνάμεων:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{2} = \frac{9}{4}, \quad \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} = (-3)^3 = -27, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{3} = \frac{27}{8}, \quad (-2)^{-3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{3} = -\frac{1}{8}$$

Αν έχετε να αντιμετωπίσετε παράσταση με γράμματα και ακέραιους εκθέτες, ακόμα και αν σας δίνουν τιμές για τα γράμματα, δουλέψτε με ιδιότητες και μόνο στο τέλος κάντε αντικατάσταση. Δείτε το παρακάτω παράδειγμα:

Βρείτε την τιμή της $\mathrm{A} = \frac{\left(x^{-2} \cdot y\right)^3 \cdot \left(x^2 \cdot y^{-2}\right)^2}{x^{-5} \cdot y^{-4}}$ για $x = -2, y = \frac{1}{4}$.

$$A = \frac{x^{-6} \cdot y^3 \cdot x^4 \cdot y^{-4}}{x^{-5} \cdot y^{-4}} = x^{-6+4+5} \cdot y^{3-4+4} = x^3 \cdot y^3 = (xy)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$$

Παρατηρήστε ότι μπορώ να μεταφέρω τις μεταβλητές από τον παρονομαστή στον αριθμητή, απλώς αλλάζοντας πρόσημο στον εκθέτη.