

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = 2x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x - 1, x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης καθώς και τις θέσεις και το είδος των τοπικών ακρότατων που παρουσιάζει.

β. Αν οι θέσεις στις οποίες παρουσιάζει ακρότατα είναι οι πιθανότητες των ενδεχομένων A και B , όπου $A \subseteq B$, να υπολογίσετε τις παρακάτω πιθανότητες: $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap B')$, $P(A \cup B')$

2. Οι μισθοί των εργαζομένων μιας επιχείρησης (σε εκατοντάδες €) είναι : 8, 9, 12, 10, 11, 5, 10, 15 εκατοντάδες ευρώ,

α) Να βρείτε το μέσο μισθό των εργαζομένων στην επιχείρηση καθώς και την τυπική απόκλιση και το συντελεστή μεταβολής.

β) Αν σε όλους γίνει κράτηση 10% για έκτακτη εισφορά, πως διαμορφώνονται τα παραπάνω μεγέθη;

γ) Ποιο είναι το ελάχιστο ποσό σε € που πρέπει να πάρουν όλοι αύξηση (τα ίδιο ποσό για όλους) ώστε το αρχικό δείγμα α γίνει ομοιογενές;

3. Οι μισθοί των εργαζομένων σε μια επιχείρηση ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή με μέσο μισθό 800 €, ενώ το 2,5% των εργαζομένων αμείβεται με μισθό κάτω από 700€.

α. Να βρείτε την τυπική απόκλιση, το εύρος και το συντελεστή μεταβολής της κατανομής. Είναι το δείγμα ομοιογενές;

β. Να βρείτε το ποσοστό των εργαζομένων με μισθό πάνω από 950€, καθώς και το ποσοστό των εργαζομένων με μισθό μεταξύ 750€ και 950€.

γ. Να βρείτε σε τι ποσοστό τουλάχιστον πρέπει να μειωθούν όλες οι αποδοχές, ώστε το δείγμα να πάψει να είναι ομοιογενές.

4. Δίνεται ο πίνακας:

X_i	0	2	3	5	8
V_i	7	α	β	5	3

α. Αν γνωρίζετε ότι η διάμεσος είναι η 13^η

παρατήρηση

ενώ η μέση τιμή είναι 3, να υπολογίσετε τα α και β .

β. Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής του δείγματος.

γ. Να δείξετε ότι η τιμή του α είναι σταθερή όταν η μέση τιμή μένει 3, ανεξάρτητα από την τιμή του β .

5. Δίνονται οι αριθμοί 5, 17, 14, 6, 8, α , β που έχουν διάμεσο 9 και μέση τιμή 10.

α. Να βρείτε τους αριθμούς α και β .

β. Να βρείτε το συντελεστή μεταβολής του δείγματος.

γ. Να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό που πρέπει να προσθέσουμε στις τιμές, ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές.

6. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$a. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{x+5} - 2}$$

$$b. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5x-6} - 2}{x^2 - 3x + 2}$$

$$g. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1 - \sqrt{x+6}}{x^2 - 4}$$

7. Να βρείτε πεδίο ορισμού, μονοτονία και ακρότατα για τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$a. f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$$

$$b. f(x) = x - 2 + \frac{1}{x-2}$$

$$c. f(x) = \ln(9 - x^2)$$

$$d. f(x) = e^{x^2 - 4x + 1}$$

$$e. f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$f. f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$$

8. Σε ένα σχολείο με 400 παιδιά, τα 90 ασχολούνται με το ποδόσφαιρο, τα 70 ασχολούνται με το μπάσκετ ενώ 50 άτομα ασχολούνται και με τα δύο αθλήματα. Αν επιλέξουμε ένα παιδί στην τύχη, να βρείτε τις πιθανότητες:

α. Να ασχολείται με ένα τουλάχιστον από τα δύο αθλήματα

β. Να ασχολείται μόνο με ποδόσφαιρο

γ. Να ασχολείται με ένα ακριβώς από τα δύο αθλήματα.

δ. Να μην ασχολείται με κανένα άθλημα.

$$9. \text{ Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2x - 3}{x - 1}, & x \neq 1 \\ a^2 - 4, & x = 1, a > 0 \end{cases}$$

A. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$

B. Να βρείτε το a ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$.

10. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = x^3 + 2e^x + 1$

A. Να βρείτε την παράγωγο της και να δικαιολογήσετε ότι είναι γνήσια αύξουσα.

B. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της στο σημείο $x_0 = 0$.

Γ. Να λύσετε την εξίσωση: $f'(x) + f''(x) = 4 \cdot e^x$

11. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = 3x - 3 - x \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

A. Να βρείτε τη μονοτονία και την μέγιστη τιμή της συνάρτησης .

B. Να αποδείξετε ότι: $3x - x \ln x \leq e^2$ για κάθε $x > 0$.

Γ. Να αποδείξετε ότι: $f(e^{100}) > f(e^{110})$

12. Η μετατόπιση ενός σώματος στον άξονα xx' δίνεται από τη σχέση :

$$x(t) = t^2 - 6t + 1, \quad t > 0, \quad t \rightarrow \sec, \quad x \rightarrow m$$

A. Να βρείτε τους τύπους που δίνουν την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος.

B. Να βρείτε την επιτάχυνση του σώματος τη χρονική στιγμή που το σώμα είναι ακίνητο.

13. Μια ομάδα μπάσκετ έχει μέσο όρο ύψους των 10 παικτών της, τα 198cm. Να βρείτε το νέο μέσο όρο του ύψους σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Φεύγουν δύο παίκτες με ύψη 201 και 203cm.

β. Φεύγουν δύο παίκτες με ύψη 201 και 203cm και έρχονται δύο άλλοι με ύψη 200 και 204cm.

γ. Αν έρθει ένας παίκτης τι ύψος πρέπει να έχει ώστε ο νέος μέσος όρος ύψους της ομάδας να γίνει 199cm ;

14. Οι τιμές $\chi, \psi, 14, 8, 13$ έχουν μέση τιμή και διάμεσο ίση με 11. Να βρείτε τα χ και ψ . Τι αλλάζει αν η διάμεσος είναι 11 και η μέση τιμή 12;

15. Μια τάξη συγκροτείται από τρεις ομάδες παιδιών. Η πρώτη ομάδα έχει 5 άτομα με μέσο όρο βαθμών το 18, η δεύτερη ομάδα 7 άτομα με μέσο όρο το 15 και μια τρίτη ομάδα από 8 μαθητές. Ο μέσος όρος του τμήματος διαμορφώθηκε στο 14,55. Να βρείτε το μέσο όρο των βαθμών της 3^{ης} ομάδας μαθητών. Αν η Τρίτη ομάδα είχε 12 άτομα, πόσο θα γινόταν ο μέσος όρος ;

16. Να βρείτε τη διάμεσο και τη μέση τιμή στις παρακάτω κατανομές συχνοτήτων:

χ_i	V_i
2	6
3	8
4	10
5	9
6	7
Σύνολο	50

χ_i	V_i
4	7
5	8
6	5
7	6
8	7
Σύνολο	33

χ_i	V_i
3	4
5	6
8	2
9	5
10	3
Σύνολο	20

χ_i	V_i
2	2
3	5
4	6
5	5
6	7
Σύνολο	25

17. Ένας επενδυτής έχει τοποθετήσει το 15% των χρημάτων σε βιομηχανικές μετοχές, το 30% σε τραπεζικές μετοχές, το 35% σε ομόλογα και το 20% σε repos. Δύο χρόνια μετά, οι αποδόσεις έχουν ως εξής : Οι βιομηχανικές μετοχές έπεσαν κατά 3%, οι τραπεζικές κατά 8%, τα ομόλογα αυξήθηκαν κατά 5% και τα repos έπεσαν κατά 9%. Να βρείτε τη μέση απόδοση διετίας που πέτυχε ο επενδυτής.

18. Δίνονται οι n σε πλήθος τιμές t_1, t_2, \dots, t_n με μέση τιμή 8 και τυπική απόκλιση 2. Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των παρακάτω μεταβλητών

y_i, z_i, x_i όπου $y_i = 4t_i - 12$, $z_i = 5 - t_i$, $x_i = \frac{t_i - 13}{5}$. Στη συνέχεια να υπολογίσετε

τα συντελεστή μεταβολής των παραπάνω μεταβλητών και να τις κατατάξετε ως προς την ομοιογένεια.

19. Ο μισθός 10 εργαζομένων (σε εκατοντάδες €) σε μια επιχείρηση είναι τα παρακάτω ποσά: 4, 5, 3, 6, 7, 5, 4, 3, 4, 9.

α) Να βρείτε το μέσο μισθό, την τυπική απόκλιση και το συντελεστή μεταβολής του δείγματος.

β) Αν ο μισθός κάθε υπαλλήλου αυξηθεί κατά 80 €, να βρείτε τις νέες τιμές των μέτρων θέσης και διασποράς.

γ) Αν στους μισθούς που διαμορφώθηκαν μετά την αύξηση γίνει κράτηση φόρου 10% να βρείτε τις τελικές τιμές των μέτρων θέσης και διασποράς.

20. α. Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση: $s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 - (\bar{x})^2$

β. Αν σε ένα δείγμα μεγέθους n με μέση τιμή 100 και διακύμανση 100 ισχύει ότι:

$\sum_{i=1}^{100} t_i^2 = 404000$, να βρείτε το μέγεθος του δείγματος.

γ. Αν όλες οι τιμές του δείγματος μειωθούν στο μισό, πως θα επηρεαστεί η μέση τιμή και η ομοιογένεια του δείγματος.

21. Η διάμεσος και ο μέσος όρος των ηλικιών επτά ανθρώπων είναι τα 11 χρόνια. Οι πέντε από αυτούς έχουν ηλικίες 5, 8, 14, 17, 20.

α) Να βρείτε τις ηλικίες όσων λείπουν.

β) Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια το δείγμα των ηλικιών θα γίνει ομοιογενές.

22. Δίνονται οι παρατηρήσεις t_1, t_2, \dots, t_n μιας ποσοτικής μεταβλητής X με μέση τιμή \bar{x} και τυπική απόκλιση s καθώς και η συνάρτηση με τύπο:

$$f(t) = \frac{1}{300s^2} (t - \bar{x})^3, \quad s \neq 0.$$

α) Να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς t γίνεται ελάχιστος για $t = \bar{x}$ και να βρείτε την ελάχιστη τιμή του.

β) Αν ισχύει ότι $f'(0) = 1$, να βρείτε το συντελεστή μεταβολής και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

γ) Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των αριθμών $f'(t_1), f'(t_2), \dots, f'(t_n)$ είναι ίση με

$$\bar{x} = \frac{1}{100}.$$

23. Σε δείγμα 10000 μαθητών που απάντησαν γραπτά σε ένα τεστ ευφυΐας, παρατηρήθηκε ότι οι βαθμοί τους ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή με μέσο δείκτη το 95. Αν γνωρίζουμε ότι το 16% περίπου των μαθητών είχαν δείκτη μικρότερο του 90, να εκτιμήσετε το πλήθος των μαθητών με δείκτη : α) Πάνω από 110. β) Μεταξύ 90 και 110. γ) Μεταξύ 95 και 100.

24. Το βάρος ενός δείγματος μαθητών Λυκείου ακολουθεί περίπου κανονική κατανομή. Το 50% των μαθητών του δείγματος έχει βάρος το πολύ 65 Kg, ενώ περίπου το 47,5% αυτών έχουν βάρος από 65 Kg ως 75 Kg.

α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την τυπική απόκλιση του δείγματος του βάρους των μαθητών.

β. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

γ. Να υπολογίσετε το ποσοστό των μαθητών του δείγματος με βάρος από 55 Kg ως 70 Kg.

δ. Ο αριθμός των μαθητών με βάρος 55-60 Kg είναι 54. Υπολογίστε το σύνολο των μαθητών του δείγματος.

25. Σε ένα σχολείο φοιτούν 400 μαθητές. Οι 64 από αυτούς χρειάζονται λιγότερο από 20 λεπτά για να φτάσουν στο σχολείο τους το πρωί, ενώ 10 άτομα χρειάζονται πάνω από 32 λεπτά για τον ίδιο λόγο. Με δεδομένο ότι το πλήθος των μαθητών σε σχέση με το χρόνο προσέλευσής τους στο σχολείο ακολουθεί περίπου την κανονική κατανομή, να υπολογίσετε:

α) Την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του δείγματος.

β) Το πλήθος των μαθητών που χρειάζονται λιγότερο από 16 λεπτά για να φθάσουν στο σχολείο.

γ) Να δείξετε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

δ) Αν λόγω έργων στην περιοχή, ο χρόνος προσέλευσης για όλους τους μαθητές αυξανόταν κατά 4 λεπτά, πόσοι μαθητές θα είχαν χρόνο προσέλευσης ανάμεσα στα 24 και τα 36 λεπτά;

26. Σε ένα δείγμα μαθητών που απάντησαν γραπτά σε ένα τεστ μαθηματικών, παρατηρήθηκε ότι οι βαθμοί τους ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή με το 84 % των μαθητών να έχει βαθμό μέχρι 80/100. Αν γνωρίζουμε επιπλέον ότι το 2,5% των μαθητών είχαν βαθμό μεγαλύτερο από 85/100, να υπολογίσετε:

α) Τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των βαθμών τους.

β) Το πλήθος των μαθητών με βαθμό από 70 ως 80, αν γνωρίζετε ότι 15 μαθητές βαθμολογήθηκαν με βαθμό μεγαλύτερο από 90/100.

γ) Πόσο τουλάχιστον θα έπρεπε να μειωθούν όλοι οι βαθμοί ώστε το δείγμα να μη είναι πια ομοιογενές;

27. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{400}{3}x^3 - 60x^2 + 5x + 1$ και οι n σε πλήθος

παρατηρήσεις, t_1, t_2, \dots, t_n . Το δείγμα των παρατηρήσεων είναι ομοιογενές με συντελεστή μεταβολής και μέση τιμή τις θέσεις τοπικών ακρότατων της συνάρτησης f .

α) Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης f καθώς και τις θέσεις στις οποίες παρουσιάζει ακρότατα β) Να βρείτε τη διασπορά του δείγματος γ) Να βρείτε για ποιες τιμές ενός πραγματικού αριθμού a , ο οποίος προστίθεται σε κάθε τιμή t_i , το δείγμα δεν είναι πλέον ομοιογενές.

28. Έστω η συνάρτηση $f(x) = (x - P(A))^2 + (x - P(B))^2$, όπου τα A, B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $\Omega = \{A, B, \Gamma\}$. Αν γνωρίζετε ότι η

συνάρτηση έχει ελάχιστο το σημείο $M\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{72}\right)$, να υπολογίσετε:

α) Τα $P(A), P(B)$ β) Το άθροισμα: $P(A \cup B) + P(A \cap B)$ γ) Την πιθανότητα να πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, Γ .

29. Δίνονται οι συναρτήσεις: $g(x) = x \cdot e^{-P(B)x}$ και $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}, & x \neq 1 \\ 2P(A)+1, & x = 1 \end{cases}$

όπου A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω .

α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x=1$, να υπολογίσετε το $P(A)$.

β) Να βρείτε το $P(B)$ αν γνωρίζετε ότι η g έχει οριζόντια εφαπτομένη στο $x=3$.

γ) Να βρείτε πραγματικό αριθμό a για το οποίο ισχύει: $g''(a)=0$.

δ) Αν η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A, B είναι κατά $7/12$ μεγαλύτερη της πιθανότητας να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα A, B , να υπολογίσετε την πιθανότητα ένα ακριβώς από τα A, B να πραγματοποιείται.

30. Έχουμε 30 μπάλες αριθμημένες από το 1 ως το 30 μέσα σε ένα κόκκινο κουτί. Επιλέγουμε στην τύχη μια μπάλα. Έστω A το ενδεχόμενο ο αριθμός της να είναι άρτιος και B το ενδεχόμενο ο αριθμός αυτός να είναι πολ/σιο του 5. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες: α) Των ενδεχομένων A, B β) Να πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B γ) Να πραγματοποιείται το A ή να μην πραγματοποιείται το B και δ) Να πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα ενδεχόμενα A, B .

31. Έστω Ω δ.χ. και A, B δύο ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου. Αν η πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου B ισούται με την τετμημένη του ακρότατου της συνάρτησης g και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x=3$, όπου :

$$g(x) = 3x^2 - 5x + 1 \text{ και } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 3P(A) + 1, & x = 3 \end{cases}, \text{ να βρείτε:}$$

α) Τα $P(A)$ και $P(B)$.

β) Να δείξετε ότι : $\frac{1}{2} \leq P(A \cap B) \leq \frac{2}{3}$

γ) Αν θεωρήσετε ότι τα $P(A)$, $P(B)$ είναι αντίστοιχα η τυπική απόκλιση και η μέση τιμή ενός δείγματος, να βρείτε το συντελεστή μεταβολής του δείγματος και να κρίνετε αν αυτό είναι ομοιογενές. Θα αυξανόταν η ομοιογένεια αν τα $P(A)$, $P(B)$ ήταν η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση;

32. Έστω η συνάρτηση με τύπο : $f(x) = e^{px}$, $p \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του p για τις οποίες ισχύει: $f''(x) - 13f'(x) + 12f(x) = 0$.

β) Αν οι τιμές που βρήκατε στο α ερώτημα, αντιπροσωπεύουν την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση ενός ομοιογενούς δείγματος το οποίο ακολουθεί περίπου την κανονική κατανομή τότε:

i. Να βρείτε το συντελεστή μεταβολής του δείγματος.

ii. Να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών μπορεί να περιλαμβάνεται το 16% των μετρήσεων.

33. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 5$, $x \in \mathbb{R}$ καθώς και οι αριθμοί 10, 13, 20.

α) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f , ονομάστε w_1, w_3 τις θέσεις τους.

β) Να βρείτε σε ποιο σημείο η γραφική παράσταση της f' δέχεται οριζόντια εφαπτομένη, ονομάστε w_2 την τετμημένη του.

γ) Αν τα w_i λειτουργούν σαν συντελεστές βαρύτητας για τους αριθμούς που δόθηκαν στην αρχή αντίστοιχα, να βρείτε τη μέση τιμή των τριών αριθμών.

34. Έστω οι συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύουν:

$$f'(x) = 2x(x-1)(x+2)(x-e) \text{ , } g(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{2-e}{2}x^2 - 2ex + 3, \text{ } x \in \mathbb{R}.$$

Έστω ακόμα τα σύνολα: $\Omega = \{x / \text{ } x \text{ θέση τοπικού ακρότατου της } f\}$ και $A = \{x / \text{ } x \text{ θέση τοπικού ακρότατου της } g\}$.

A. Να βρείτε τα στοιχεία των συνόλων Ω και A .

B. Αν θεωρήσουμε τον Ω σαν δειγματικό χώρο με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου A .