ΘΕΩΡΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟ

Α. Ξεκινάω με τις λεγόμενες παραμετρικές, δηλαδή δευτεροβάθμια πολυώνυμα που εκτός της μεταβλητής χ περιέχουν και κάποιο ή κάποια άλλα γράμματα (λ, μ, α κ.λ.π) τα οποία χαρακτηρίζονται παράμετροι. Η εκφώνηση τέτοιων ασκήσεων, περιέχει συνήθως ζητούμενο του στυλ: «Βρείτε την τιμή της παραμέτρου ώστε το τριώνυμο/εξίσωση να έχει…» . Παραθέτω ένα πίνακα όπου φαίνονται τα ζητούμενα και απέναντι η απαίτηση που εσείς πρέπει να προβάλλετε και να επιλύσετε. Όπου βλέπετε f(x), εννοώ δευτεροβάθμιο πολυώνυμο του χ.

Ζητούμενο	**Απαίτηση**
Η εξίσωση να έχει δύο πραγματικές ρίζες	$\Delta \geq 0$
Η εξίσωση να έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες	$\Delta > 0$
Η εξίσωση να έχει δύο ίσες ρίζες (μία διπλή)	$\Delta=0$
Η εξίσωση να έχει δύο θετικές ρίζες	$\Delta \geq 0$ *και* $s > 0$ *και* $p > 0$
Η εξίσωση να έχει δύο αρνητικές ρίζες	$\Delta \geq 0$ *και* $s < 0$ *και* $p > 0$
Η εξίσωση να έχει δύο ετερόσημες ρίζες	$p < 0$ (*τότε οπωσδήποτε* $\Delta > 0$)
Η ανίσωση f(x)>0, να ισχύει για κάθε χ πραγματικό αριθμό	$\Delta < 0$ *και* $a > 0$
Η ανίσωση f(x)<0, να ισχύει για κάθε χ πραγματικό αριθμό	$\Delta < 0$ *και* $a < 0$
Η εξίσωση να έχει αντίθετες ρίζες	$s = 0$ *και αφού βρεις το* "λ", *ελέγχεις και αν η* Δ *είναι θετική.*
Η εξίσωση να έχει δύο αντίστροφες ρίζες	$p = 1$ *και αφού βρεις το* "λ", *ελέγχεις και αν η* Δ *είναι θετική.*
Η εξίσωση να είναι αδύνατη ή το τριώνυμο να έχει σταθερό πρόσημο	$\Delta < 0$

Β. Αν στην εκφώνηση της άσκησης, περιγράφεται σχέση ανάμεσα στις ρίζες του τριωνύμου (για παράδειγμα: Η μια ρίζα είναι τριπλάσια της άλλης ή η μία ρίζα ισούται με το τετράγωνο της άλλης ή η διαφορά των δύο ριζών ισούται με…), ξεκινήστε γράφοντας τις ισότητες με τα s και p και επιλύστε το σύστημα που προκύπτει. Προσοχή! Αφού βρείτε τις τιμές της παραμέτρου, γυρίστε στην αρχική εξίσωση και επιβεβαιώστε ότι όντως το τριώνυμο έχει δύο ρίζες για τις τιμές της παραμέτρου που βρήκατε.

Γ. Προσέξτε την περίπτωση όπου το α του τριωνύμου είναι παράσταση που περιέχει παράμετρο. Περιορίστε το συντελεστή του χ^2 , ώστε να μη μηδενίζεται και μετά χρησιμοποιήστε τις απαιτήσεις για διακρίνουσα, άθροισμα και γινόμενο ριζών. Ακόμα καλύτερα, δώστε στην παράμετρο την τιμή που μηδενίζει το α και ελέγξτε αν η συνθήκη που περιγράφεται στην εκφώνηση πληρείται.

Δ. Αν η εκφώνηση είναι: βρείτε τις τιμές της παραμέτρου ώστε η ανίσωση $f(x) \geq 0$ να ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό χ, απαιτείστε η διακρίνουσα να είναι μικρότερη ή ίση του μηδενός και το α να είναι θετικό. Ελέγξτε ξεχωριστά την περίπτωση όπου το α είναι μηδέν (αν υπάρχει τέτοιο ενδεχόμενο).

Ε. Δύο αντίστροφες ρίζες, μπορεί να είναι και ίσες, στην περίπτωση που μιλάμε για τους αριθμούς 1 ή (-1). Είναι δυνατόν σε αυτή την περίπτωση να έχουμε Δ=0 και p=1. Αναφέρομαι στις εξισώσεις: $(x-1)^2 = 0 \ \ και \ \ (x+1)^2 = 0.$

Δύο αντίθετες ρίζες που είναι ίσες, είναι μόνο η τιμή μηδέν. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο στην περίπτωση της εξίσωσης $ax^2 = 0 \ \ με \ \ a \neq 0.$

ΣΤ. Όποτε σας ζητηθεί να χρησιμοποιήσετε παράσταση που περιέχει τις ρίζες ρ_1 και ρ_2 ενός τριωνύμου, προσπαθήστε να εκφράσετε την παράσταση σαν συνάρτηση των s και p, τα οποία φυσικά και θα υπολογίσετε. Στην προσπάθειά σας αυτή, θυμηθείτε τις παρακάτω ταυτότητες:

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = (\rho_1 + \rho_2)^2 - 2\rho_1\rho_2 = s^2 - 2p.$$

$$\rho_1^3 + \rho_2^3 = (\rho_1 + \rho_2)\cdot(\rho_1^2 - \rho_1\rho_2 + \rho_2^2) = s^3 - 3ps$$