

## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ - ΕΠ4 - 2324

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής. **(4 Μονάδες)**

**A2.** Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών  
**(3+8 μονάδες)**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

α. Η εικόνα ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης είναι διάστημα.

β. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνήσια αύξουσα στο  $[a, \beta]$  τότε το σύνολο τιμών της είναι το  $[f(a), f(\beta)]$ .

γ. Αν το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης  $f$  είναι το  $\mathbb{R}$ , τότε η εξίσωση  $f(x)=a$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα για κάθε  $a$  πραγματικό αριθμό.

δ. Ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^x = +\infty$

ε. Μια συνεχής συνάρτηση με σύνολο τιμών το  $[-a, a]$  με  $a > 0$ , τέμνει τον  $y'$  σε ένα τουλάχιστον σημείο. **(10 Μονάδες)**

### ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις  $h, g$  με τύπους:  $h(x) = e^{-x} - e^x$  και  $g(x) = \ln \sqrt{x}$

**B1.** Να ορίσετε τη συνάρτηση  $f = h \circ g$ , να δείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της. **(4+5+4 Μονάδες)**

Έστω ότι  $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x}}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

**B2.** Να υπολογίσετε τα όρια: α.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu 2x}{f(x)}$  β.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{e}\right)^{f(x)}$  **(3+3 Μονάδες)**

**B3.** Αν για μια συνεχή στο  $(0, +\infty)$  συνάρτηση  $T$ , για την οποία γνωρίζουμε ότι η γραφική της παράσταση δεν τέμνει τον  $x'x$  ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{T(x) - \sqrt{x} \cdot f(x) + \eta\mu(x-2)}{x-2} = 3$ , να αποδείξετε ότι  $T(x) > 0$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ . **(6 Μονάδες)**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο:  $f(x) = \sqrt{4-x} - \ln(x-1)$

**G1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τη μονοτονία της και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα  $[-\ln 3, +\infty)$ .

**(2+3+4 Μονάδες)**

**G2.** Να δείξετε ότι η εξίσωση:  $f^{-1}(f(x) + \sqrt{2} - 2024) = 2$  έχει ακριβώς μία λύση.

**(6 μονάδες)**

**G3.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  δεν έχει κοινό σημείο

με την ευθεία με εξίσωση  $y=x-6$ .

(5 Μονάδες)

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[ \frac{f(x)}{(x-1)^3} \cdot \eta\mu(x-1) \right]$

(5 Μονάδες)

### ΘΕΜΑ Δ

Έστω μια συνεχής στο  $\mathbb{R}$  συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

- $f(x) \neq 2x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $(f(x) - 2x) \cdot e^{-2x} + \frac{1}{2x - f(x)} = 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- $f(1) > 2$

Δ1. Να αποδείξετε ότι  $f(x) > 2x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(3+3 Μονάδες)

Δ2. Να αποδείξετε ότι  $f(x) = 2x + e^x$ .

(7 Μονάδες)

Δ3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι αντιστρέψιμη και στη συνέχεια ότι η εξίσωση  $f^{-1}(x) = x$  έχει μοναδική λύση στο  $\mathbb{R}$ .

(7 Μονάδες)

Δ4. Να βρείτε τον θετικό πραγματικό αριθμό  $a$ , για τον οποίο ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{f(x)+1} - a^{f(x)}}{e^{f(x)} + a^{f(x)+1}} = -\frac{1}{4}$$

(5 Μονάδες)