ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠ5 – 2223

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$, *για κάθε* $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. **(8 μονάδες)**

Α2. Δίνεται ο ισχυρισμός: «Μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ , η οποία είναι γνήσια μονότονη σε αυτό, είναι οπωσδήποτε παραγωγίσιμη στο Δ». Να χαρακτηρίσετε ως «Αληθή» ή «Ψευδή» τον ισχυρισμό και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(1 + 3 μονάδες)**

Α3. Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία του παράγωγου αριθμού μιας συνάρτησης; **(3 μονάδες)**

Α4. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» τους παρακάτω ισχυρισμούς:

α. Μια συνάρτηση που είναι συνεχής σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού της, είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό.

β. Αν x_o είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε: $(\eta\mu(-x_o))' = -\sigma\upsilon\nu x_o$

γ. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο σημείο x_o, αν υπάρχει το: $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$

δ. Ισχύει ότι : $(\ln|x|) = -\dfrac{1}{x}$ για $x < 0$

ε. Αν μια συνάρτηση f έχει εφαπτομένη που δεν είναι παράλληλη στον ψ΄ψ σε σημείο της $(x_o, f(x_o))$, τότε είναι παραγωγίσιμη σε αυτό. **(10 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

Β1. Να βρείτε την παράγωγό της. **(8 μονάδες)**

Β2. Να βρείτε την εφαπτομένη της (ε) στο σημείο (-7,f(-7)) και να βρείτε – αν υπάρχει – εφαπτομένη της η οποία να διέρχεται από την αρχή των αξόνων. **(3+5=8 μονάδες)**

Έστω ότι η (ε) είναι η ευθεία: x+3y-5=0.

Β3. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α ώστε η (ε) να είναι εφαπτομένη της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \alpha x^2$ και να προσδιορίσετε το σημείο επαφής τους. **(9 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$, $x > 1$.

Γ1. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης f και το σύνολο τιμών της. **(8 μονάδες)**

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης: $f(x) = e^{\alpha} + \alpha - 1$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α. **(9 μονάδες)**

Γ3. Έστω $g(x) = x^{f(x)}$, $x > 0$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της g δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο A(2, g(2)). **(8 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = e^{2x} + x - 2$, $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f και το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = 2023$.

Δ2. Αν θεωρήσετε γνωστό ότι η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι συνεχής, να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της f^{-1} στο x_o=-1.

Δ3. Αν η ευθεία με εξίσωση $y=3x-k$, $k \in \mathbb{R}$, εφάπτεται της C_f , να βρείτε το k και το σημείο επαφής τους.

(Δ1: 5+2=7 μονάδες, Δ2: 9 μονάδες, Δ3: 9 μονάδες)