ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΕΠ3 – 2223 (1)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών. (Μονάδες 3+7=10)

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής. (Μονάδες 5)

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως «Σωστό» ή «Λάθος»

α. Η εικόνα ενός διαστήματος μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης είναι διάστημα.

β. Μια συνεχής σε ένα διάστημα Δ συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση δεν τέμνει τον χχ΄, διατηρεί πρόσημο.

γ. Μια συνεχής συνάρτηση στο [α, β], μπορεί να παρουσιάζει ελάχιστο και για χ=α και για χ=β.

δ. Αν για μια συνεχή στο [α, β] συνάρτηση f ισχύει ότι f(α)f(β)>0, η συνάρτηση f δεν έχει ρίζα στο [α, β].

ε. Το όριο μιας ρητής συνάρτησης όταν το χ τείνει στο άπειρο είναι πραγματικός αριθμός μόνο αν τα πολυώνυμα σε αριθμητή και παρονομαστή είναι ίδιου βαθμού. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής, γνήσια μονότονη, η γραφική της παράσταση τέμνει τον ψ΄ψ στο σημείο με τεταγμένη 3 και διέρχεται από το σημείο Α(1,ln2).

Β1. Να βρείτε τη μονοτονία της. (Μονάδες 3)

Β2. Να αποδείξετε ότι για κάθε α>0 ισχύει: $f(a\ln a)\le f(\ln a)$. (Μονάδες 7)

Β3. Να λύσετε την εξίσωση $f(e^{x-1}+\ln x)=\ln 2,\ \ x>0.$ (Μονάδες 9)

Β4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο $g(x)=f(x)+(3-\ln 2)x-3$ δεν είναι 1-1. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής στο [-2, 2] συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

$f(x)(f(x)-2)=3-x^2\ \ \kappa\alpha\iota\ \ f(0)=3.$ Έστω επίσης η συνάρτηση g με τύπο: g(x)=f(x)-1.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η g(x) διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x\in(-2,2)$. (Μονάδες 9)

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f(x)=1+\sqrt{4-x^2},\ \ x\in[-2,2]$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f. (Μονάδες 3+7)

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=\sigma\upsilon\nu\chi$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής στο R συνάρτηση f για την οποία ισχύει $(x-2)f(x)=\eta\mu(x-2)+x^2-3x+2$ και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(2, $e^{a-3}+1$).

Δ1. Να αποδείξετε ότι α=3 και να βρείτε τον τύπο της f(x). (Μονάδες 6+3)

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο R. (Μονάδες 9)

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+2)}{x+\sigma\upsilon\nu x}$ (Μονάδες 7)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΕΠ3 – 2223 (2)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών. (Μονάδες 3+7=10)

Α2. Δίνεται ο ισχυρισμός: «Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και ορισμένη στο [α, β] και η γραφική της παράσταση δεν τέμνει τον οριζόντιο άξονα, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο [α, β]» Να τον χαρακτηρίσετε ως «Αληθή» ή «Ψευδή» και να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας. (Μονάδες 1+4=5)

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως «Σωστό» ή «Λάθος»

α. Η εικόνα ενός διαστήματος μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης είναι διάστημα.

β. Μια συνεχής στο διάστημα (-5,5) συνάρτηση για την οποία ισχύει f(1)<f(-1)<f(2) , δεν είναι 1-1.

γ. Μια συνεχής συνάρτηση στο [α, β], μπορεί να παρουσιάζει ελάχιστο και για χ=α και για χ=β.

δ. Αν για μια συνεχή στο [α, β] συνάρτηση f ισχύει ότι f(α)f(β)>0, η συνάρτηση f δεν έχει ρίζα στο [α, β].

ε. Το όριο μιας ρητής συνάρτησης όταν το χ τείνει στο άπειρο είναι πραγματικός αριθμός μόνο αν τα πολυώνυμα σε αριθμητή και παρονομαστή είναι ίδιου βαθμού. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής, γνήσια μονότονη, η γραφική της παράσταση τέμνει τον ψ΄ψ στο σημείο με τεταγμένη 3 και διέρχεται από το σημείο Α(1,ln2).

Β1. Να βρείτε τη μονοτονία της. (Μονάδες 3)

Β2. Να αποδείξετε ότι για κάθε α>0 ισχύει: $f(a\ln a)\le f(\ln a)$. (Μονάδες 7)

Β3. Να λύσετε την εξίσωση $f(e^{x-1}+\ln x)=\ln 2,\ \ x>0.$ (Μονάδες 9)

Β4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο $g(x)=f(x)+(3-\ln 2)x-3$ δεν είναι 1-1. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=e^{-x}+\dfrac{1}{x}-2,\ \ x\in(0,+\infty)$.

Γ1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (Μονάδες 8)

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,+\infty)$. (Μονάδες 5)

Θεωρείστε δεδομένο ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $(-2,+\infty)$

Γ3. Αν η εξίσωση $f(x)=\ln k,\ \ k>0$ είναι αδύνατη στο $(0,+\infty)$, να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{(ke^2-1)x}$

(Μονάδες 7)

Γ4. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x+\ln x)\le\dfrac{1}{e}-1\ \ ,\ x\in(0,+\infty)$ (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής στο R συνάρτηση f για την οποία γνωρίζουμε ότι:

$$f(x)(f(x)-4\sigma\upsilon\nu x)+2=x^2+4\eta\mu^2 x\quad \kappa\alpha\iota\quad f(0)=2-\sqrt{2}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=2\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{x^2+2}\ \ ,\ x\in\mathbb{R}.$ (Μονάδες 9)

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x)\le 2-\sqrt{2}\quad \gamma\iota\alpha\ \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ x\in\mathbb{R}.$ (Μονάδες 6)

Δ3. Να βρείτε τα όρια: $i.\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\quad ii.\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ (Μονάδες 10)