Α3. Αληθής, με απόδειξη Α4. Λ - Σ - Λ - Λ - Σ

Β1. $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\ln\left(1-\frac{2}{x+1}\right), x\in(1,+\infty)$.

Για $x_1<x_2 \Rightarrow x_1+1<x_2+1 \Rightarrow -\frac{2}{x_1+1}<-\frac{2}{x_2+1} \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$, δηλαδή f γνήσια αύξουσα.

Β2. $f^{-1}(-\ln 3)=\alpha \Rightarrow -\ln 3=f(\alpha) \to f(2)=f(\alpha) \Rightarrow \alpha=2$

Β3. Αν $x<y \Rightarrow f(x)<f(y) \Rightarrow \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)<\ln\left(\frac{y-1}{y+1}\right) \Rightarrow$

$\ln(x-1)-\ln(x+1)<\ln(y-1)-\ln(y+1) \Rightarrow \ln\left(\frac{x-1}{y-1}\right)<\ln\left(\frac{x+1}{y+1}\right)$

Β4. $e^{f(x)}<\frac{1}{3} \Rightarrow f(x)<\ln\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow f(x)<-\ln 3 \Rightarrow f(x)<f(2) \Rightarrow x<2$ και $x>1 \Rightarrow x\in(1,2)$

Γ1. $f(x)=x^4+2x^2+2=\left(x^2+1\right)^2+1,\quad g(x)=\sqrt{x-1}$

$A_{f\circ g}=\{X\geq 1 \text{ και } g(x)\in\mathbb{R}\}=[1,+\infty)$ με $f(g(x))=\left(\sqrt{x-1}^2+1\right)^2+1=x^2+1$

$A_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}, f(x)\geq 1\}=\mathbb{R}$ με $g(f(x))=\sqrt{\left(x^2+1\right)^2+1-1}=\sqrt{\left(x^2+1\right)^2}=x^2+1$

συνεπώς $f\circ g\neq g\circ f$.

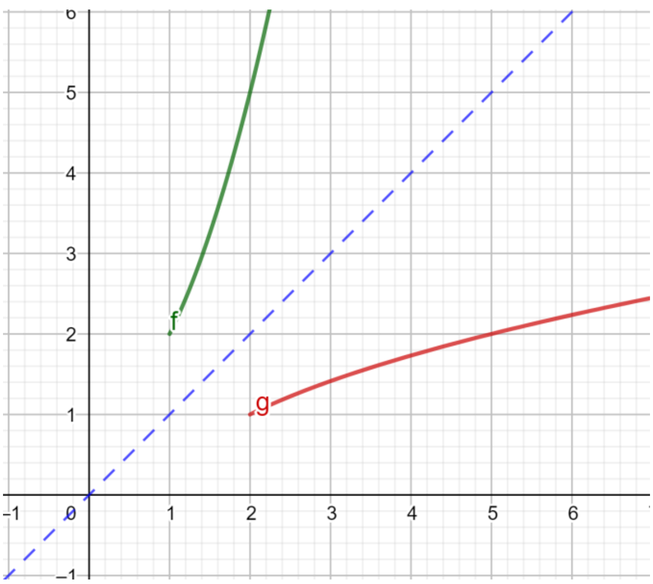
Γ2. Η $h(x)$ είναι γνήσια αύξουσα στο $[2,+\infty)$, $y=x^2+1 \Leftrightarrow x^2=y-1 \Leftrightarrow x=\sqrt{y-1}$ με $y\geq 2$

άρα $h^{-1}(x)=\sqrt{x-1}=g(x)$.

Γ3. Είναι $h(g(x))=g(h(x))=x \quad, x\in[2,+\infty)$ άρα η ανίσωση γίνεται:

$\ln^2 x-\ln x-2<0 \Leftrightarrow -1<\ln x<2 \Leftrightarrow \frac{1}{e}<x<e^2$ και τελικά $x\in[2,e^2)$

Γ4.



Δ1.

Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x)=2x+e^x$, *η οποία είναι γνήσια αύξουσα. Συνεπώς,*

για $x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1+1<x_2+1 \Leftrightarrow 2f(x_1)+e^{f(x_1)}<2f(x_2)+e^{f(x_2)} \Leftrightarrow g(f(x_1))<g\big(f(x_2)\big) \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Δ2. $2f(x)+e^{f(x)}=x+1 \Leftrightarrow 2y+e^y=x+1 \Leftrightarrow x=2y+e^y-1$, *άρα* $f^{-1}(x)=e^x+2x-1,\ x\in\mathbb{R},\ f\nearrow$

Δ3. $f(x)=x \Leftrightarrow f^{-1}(x)=x \Leftrightarrow e^x+2x-1=x \Leftrightarrow e^x+x-1=0.$

θεωρώ τη συνάρτηση $g(x)=e^x+x-1$, g *γν. αύξουσα,* $g(0)=0$ *συνεπώς μόνη ρίζα η* $x=0$

Δ4. $f(x^2)-f(3x-2)<\dfrac{x^2-3x+2}{2} \Leftrightarrow 2f(x^2)-x^2-1<2f(3x-2)-(3x-2)-1 \Leftrightarrow$

$-e^{f(x^2)}<-e^{f(3x-2)} \Leftrightarrow x^2-3x+2>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$