ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΕ ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ -ΕΠ2-2223

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο Α λέμε ότι παρουσιάζει μέγιστο σε σημείο x_0 ;
(4 μονάδες)

Α2. Πότε ορίζεται η σύνθεση μιας συνάρτησης g με μια συνάρτηση f ; **(4 μονάδες)**

Α3. Δίνεται ο ισχυρισμός: «Μια συνάρτηση γνήσια φθίνουσα στο R, έχει αντίστροφη η οποία είναι επίσης γνήσια φθίνουσα». Να χαρακτηρίσετε ως «Αληθή» η «Ψευδή» τον ισχυρισμό και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(2+5 μονάδες)**

Α4. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» τους παρακάτω ισχυρισμούς:
α. Μια συνάρτηση 1-1 είναι γνήσια μονότονη.
β. Για μια περιττή συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ ισχύει πάντα ότι f(0)=0.
γ. Αν η συνάρτηση f είναι 1-1, τότε ισχύει ότι: $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$
δ. Αν οι f,g είναι γνήσια φθίνουσες, τότε η $f \circ g$, εφόσον ορίζεται, είναι γνήσια φθίνουσα επίσης.
ε. Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το [0,2], τότε και η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = f\left(2-x\right)$, έχει πεδίο ορισμού επίσης το [0,2]. **(10 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right), \quad x \in (1,+\infty)$

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα. **(6 μονάδες)**

Β2. Να δικαιολογήσετε ότι η f είναι 1-1 και να υπολογίσετε την τιμή $f^{-1}(-\ln 3)$. **(2+4 μονάδες)**

Β3. Για κάθε $x, y \in (1,+\infty)$ $\mu\varepsilon$ $x < y$, να αποδείξετε ότι $\ln\left(\dfrac{x-1}{y-1}\right) < \ln\left(\dfrac{x+1}{y+1}\right)$ **(6 μονάδες)**

Β4. Να λύσετε την ανίσωση: $e^{f(x)} < \dfrac{1}{3}$ **(7 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους: $f(x) = x^4 + 2x^2 + 2$, $x \in \mathbb{R}$ $\kappa\alpha\iota$ $g(x) = \sqrt{x-1}$, $x \in [1,+\infty)$.

Γ1. Να βρείτε τις συναρτήσεις $h = f \circ g$ $\kappa\alpha\iota$ $t = g \circ f$. Είναι ίσες; **(6+2 μονάδες)**

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = x^2 + 1, \ x \in [1,+\infty)$ είναι αντιστρέψιμη και ισχύει ότι :
$h^{-1} = g$ $\gamma\iota\alpha$ $x \geq 2$. **(6 μονάδες)**

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση: $\ln^2(g(h(x))) - \ln(h(g(x))) - 2 < 0, \ \gamma\iota\alpha \ x \in [2,+\infty)$.
(7 μονάδες)

Γ4. Να χαράξετε πρόχειρα στο ίδιο σύστημα αξόνων τις συναρτήσεις h(x) και $h^{-1}(x)$. **(4 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η ορισμένη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $2f(x) + e^{f(x)} = x + 1, \ x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα. **(6 μονάδες)**

Δ2. Να βρείτε την αντίστροφη της f και να αποδείξετε ότι και αυτή είναι γνήσια αύξουσα. (5 μονάδες)

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = x$ **(6 μονάδες)**

Δ4. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x^2)-f(3x-2)<\dfrac{x^2-3x+2}{2}$ **(8 μονάδες)**