Λύσεις ΕΠ1 - 2223

Α2. Ψευδής. Η συνάρτηση με τύπο f(x)=x για x>0 και 1/χ για χ<0 είναι 1-1 αλλά όχι γνήσια μονότονη.

Α4. Σ - Λ - Σ - Λ - Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για $x_1<x_2 \Rightarrow x_1^3<x_2^3$ και $\ln x_1<\ln x_2 \dots \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ άρα $f \nearrow$.

Αφού το $0\notin A_f$, δεν τέμνει τον yy' ενώ $f(1)=0$, άρα τέμνει τον xx' στο $M(1,0)$.

Β2. Η $f\nearrow$ άρα 1-1. Έστω $f^{-1}(e^3)=\alpha \Rightarrow e^3=f(\alpha) \Rightarrow f(e)=f(\alpha) \xRightarrow[1-1]{} \alpha=e$

Β3. Η εξίσωση γράφεται: $(x+1)^3+\ln(x+1)=(x^2+1)^3+\ln(x^2+1) \Rightarrow\dots\Rightarrow f(x+1)=f(x^2+1) \xRightarrow{1-1}$

$x^2=x \Rightarrow x=0$ (μη δεκτή) ή $x=1$, δεκτή.

Β4. Προσθέτω και στα δύο μέλη το lnx, οπότε έχουμε: $x^6+2\ln x<64x^3+\ln4+\ln x \Rightarrow$

$x^6+\ln x^2<(4x)^3+\ln 4x \Rightarrow\dots\Rightarrow f(x^2)<f(4x) \xrightarrow[f\nearrow]{} x^2-4x<0 \Rightarrow x(x-4)<0 \xRightarrow{x>0} x\in(0,4)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της h(x): $\{x\in\mathbb{R}$ και $e^x>2\}=(\ln2,+\infty)=A_h$

και $f(g(x))=\frac{e^x+1}{e^x-2} \Rightarrow h(x)=\frac{e^x-2+3}{e^x-2}=1+\frac{3}{e^x-2}$, $x\in(\ln2,+\infty)$.

Με $x_1<x_2 \Rightarrow e^{x_1}-2<e^{x_2}-2 \Rightarrow 1+\frac{3}{e^{x_1}-2}>1+\frac{3}{e^{x_2}-2} \Rightarrow h(x_1)>h(x_2)$ άρα $h\searrow$, συνεπώς η 1-1.

Γ2. $y=\frac{e^x+1}{e^x-2} \Rightarrow e^x\cdot y-2y=e^x+1 \Rightarrow e^x y-e^x=1+2y \Rightarrow e^x(y-1)=2y+1 \Rightarrow$

$x=\ln\left(\frac{2y+1}{y-1}\right)=\ln\left(\frac{2y-2+3}{y-1}\right)=\ln\left(2+\frac{3}{y-1}\right)$, $y\in(1,+\infty)$ άρα

$h^{-1}(x)=\ln\left(2+\frac{3}{x-1}\right)$, $x\in(1,+\infty)$

Γ3. Έστω $x_1<x_2 \Rightarrow x_1-1<x_2-1 \Rightarrow 2+\frac{3}{x_1-1}>2+\frac{3}{x_2-1} \xRightarrow{\ln\nearrow} \ln\left(2+\frac{3}{x_1-1}\right)>\ln\left(2+\frac{3}{x_2-1}\right)$

$\Rightarrow h^{-1}(x_1)>h^{-1}(x_2)$ δηλ. $h^{-1}\searrow$.

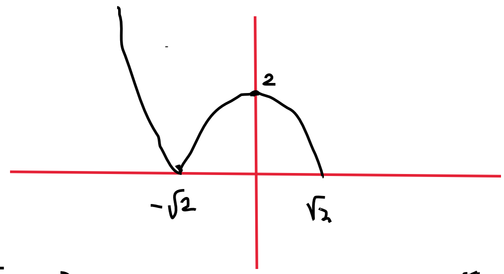
Η ανίσωση γίνεται: $h^{-1}(x+3)>\ln3=h^{-1}(4) \Rightarrow x+3<4 \Rightarrow x<1$, αδύνατη.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x)=(x^2-2)^2$, $A_f=(-\infty,\sqrt2]$ $\quad g(x)=\sqrt x$, $A_g=[0,+\infty)$

$A_{g\circ f}=\{x\in(-\infty,\sqrt2]$ και $f(x)\in A_g\}=(-\infty,\sqrt2]$ και $g(f(x))=g\left((x^2-2)^2\right)=\sqrt{(x^2-2)^2}=|x^2-2|$

Συνεπώς, $f(x)=\begin{cases} x^2-2, & x\in(-\infty,-\sqrt2] \\ -x^2+2, & x\in[-\sqrt2,\sqrt2] \end{cases}$



Δ2. $A_{f\circ g}=\{x\in[0,+\infty)$ και $\sqrt x\in(-\infty,\sqrt2]\}=\dots=[0,2]$

$f(g(x))=f(\sqrt x)=(\sqrt x^2-2)^2=(x-2)^2$. Έστω $x_1,x_2\in[0,2)$ με $x_1<x_2 \Rightarrow x_1-2<x_2-2<0$

άρα $(x_1-2)^2>(x_2-2)^2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ δηλ. f γνήσια φθίνουσα, άρα 1-1.

Δ3. $y=(x-2)^2 \Rightarrow |x-2|=\sqrt{y} \overset{x<2}{\Rightarrow} -x+2=\sqrt{y} \Rightarrow x = 2-\sqrt{y} \Rightarrow x = \dfrac{4-y}{2+\sqrt{y}}$

με $h^{-1}(x)=\dfrac{4-x}{2+\sqrt{x}}$. Επειδή $A_h=[0,2]$ και $h(x)=(x-2)^2$, το σύνολο τιμών της $h(x)$ είναι το $[0,4]$ = πεδίο ορισμού της $h^{-1}(x)$.