

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις μιας 1-1 συνάρτησης f και της αντίστροφής της που είναι ορισμένες στο \mathbb{R} , έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία $y=x$. **(Μονάδες 8)**

A2. Δίνεται η πρόταση: «Μια συνάρτηση 1-1 είναι και γνήσια μονότονη». Να την χαρακτηρίσετε ως αληθή ή ψευδή και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 1+3=4)**

A3. Πότε μια συνάρτηση είναι 1-1; **(Μονάδες 3)**

A4. Να χαρακτηρίσετε τους παρακάτω ισχυρισμούς ως «Σωστό» ή «Λάθος»

α. Κάθε γνήσια μονότονη συνάρτηση είναι 1-1.

β. Μια συνάρτηση με σύνολο τιμών το \mathbb{R} μπορεί να έχει μέγιστη ή/και ελάχιστη τιμή.

γ. Η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, έχει άξονα συμμετρίας τον $\psi' \psi$.

δ. Η συνάρτηση με τύπο $f(x) = e^x$ έχει αντίστροφη την $g(x) = e^{-x}$.

ε. Η γραφική παράσταση μιας 1-1 συνάρτησης, μπορεί να τέμνει τον οριζώντιο άξονα σε ένα το πολύ σημείο.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = x^3 + \ln x - 1$, $x \in (0, +\infty)$

B1. Να δείξετε ότι είναι γνήσια αύξουσα και να βρείτε - αν υπάρχουν - τα σημεία τομής της με τους άξονες. **(Μονάδες 4+2=6)**

B2. Να δικαιολογήσετε ότι είναι αντιστρέψιμη και να υπολογίσετε το $f^{-1}(e^3)$. **(Μονάδες 1+4=5)**

B3. Να λύσετε την εξίσωση: $(x+1)^3 - (x^2+1)^3 = \ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$, $x \in (0, +\infty)$ **(Μονάδες 7)**

B4. Να λυθεί η ανίσωση: $x^6 + \ln x < 64x^3 + \ln 4$, $x > 0$ **(Μονάδες 7)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους: $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, $x \in (2, +\infty)$ και $g(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε την συνάρτηση $h = f \circ g$ και να αποδείξετε ότι είναι 1-1. **(Μονάδες 5+3=8)**

Γ2. Να αποδείξετε ότι $h^{-1}(x) = \ln\left(2 + \frac{3}{x-1}\right)$, γνωρίζοντας ότι το σύνολο τιμών της $h(x)$ είναι το $(1, +\infty)$.

(Μονάδες 8)

Γ3. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης h^{-1} και να λύσετε την ανίσωση: $h^{-1}(x+1) > \ln 3$

(Μονάδες 6+3=9)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους: $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$, $x \in (-\infty, \sqrt{2}]$ και $g(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

Δ1. Να βρείτε τη συνάρτηση $T = g \circ f$ και να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση για αυτήν.

(Μονάδες 6+3=9)

Δ2. Να βρείτε τη συνάρτηση $h = f \circ g$ και να δείξετε ότι είναι 1-1. **(Μονάδες 4+4=8)**

Δ3. Να αποδείξετε ότι $h^{-1}(x) = \frac{4-x}{2+\sqrt{x}}$, $x \in [0,4]$. **(Μονάδες 8)**