§ 1.1

ΣΥΜΒΟΥΛΕΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

- Η ύψωση αριθμού σε δύναμη δίνει αρνητικό αποτέλεσμα μόνο σε μια περίπτωση: $(\text{αρνητικός})^{\text{περιττός}}$. Σε κάθε άλλη περίπτωση το αποτέλεσμα είναι θετικός αριθμός.
- Αν έχετε αρνητικό εκθέτη σε αριθμό, αντιστρέψτε τον κάνοντας θετικό τον εκθέτη και υπολογίστε το αποτέλεσμα. Αν έχετε αρνητικό εκθέτη σε μεταβλητή, εφαρμόστε ιδιότητες δυνάμεων δεν υπάρχει λόγος να αντιστρέψετε τίποτα. Δείτε τα παραδείγματα που ακολουθούν:

  $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}=\left(-\frac{3}{2}\right)^{3}\cdot(-2)^{4}=-\frac{27\cdot 16}{8}=54$

  $\alpha^{-3}\cdot\beta^{4}\cdot\frac{\alpha^{5}\cdot\beta^{-2}}{\alpha^{6}\cdot\beta^{-3}}=\alpha^{-3}\cdot\beta^{4}\cdot\alpha^{5}\cdot\beta^{-2}\cdot\alpha^{-6}\cdot\beta^{3}=\alpha^{-4}\cdot\beta^{5}$. Στο δεύτερο παράδειγμα, όσα ήταν στον παρονομαστή τα μεταφέραμε στον αριθμητή αλλάζοντας πρόσημο στο εκθέτη.
- Δύο αριθμοί είναι αντίστροφοι αν το γινόμενό τους ισούται με 1. Το 0 δεν έχει αντίστροφο, ενώ γενικά μπορούμε να τους συμβολίσουμε $x,\ x^{-1}=\frac{1}{x},\ \ \mu\varepsilon\ \ x\neq 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. Να βρείτε το αποτέλεσμα στις παρακάτω πράξεις:

1. $-3\cdot 2-4\cdot 3+7\cdot 2+5\cdot 3-2=$
2. $-2\cdot(-3+6)+4\cdot(-1-2)-3\cdot(2-7)=$
3. $(-3+2\cdot 5)-(7-3\cdot 4)+(-2\cdot 3-5)=$
4. $-3\cdot(-2-4)-(6-4\cdot 3)+2\cdot(-1-4)=$
5. $(1-2\cdot 3):(-1-4)-(-2\cdot 4+8)\cdot 2022=$
6. $(-4+6)^{3}-(-1-2)^{2}-(5-8)^{3}-(-1)^{25}=$
7. $(-2)^{3}-(-2-3)^{2}+(3-7)^{2}-(-1+2)^{10}=$
8. $\left(-3+2^{3}-7\right)^{4}-\left(-4^{2}+12+1\right)^{3}=$

Β. Να βρείτε το αποτέλεσμα στις παρακάτω πράξεις:

1. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=$
2. $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}=$
3. $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-1}=$
4. $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}=$
5. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}=$
6. $(-3)^{-3}=$
7. $(-2)^{-4}=$
8. $(2)^{-3}=$
9. $(5)^{-2}=$
10. $(-4)^{-3}=$

Γ. Να εφαρμόσετε ιδιότητες δυνάμεων για να βρείτε το αποτέλεσμα:

1. $\frac{2^{10}\cdot 2^{-8}}{2^{4}\cdot 2^{-3}}=$
2. $\frac{3^{-7}\cdot 3^{4}}{3^{5}\cdot 3^{-8}}=$
3. $\frac{(-5)^{-6}\cdot(-5)^{-4}}{(-5)^{-5}\cdot(-5)^{-3}}=$
4. $(-3)^{7}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{7}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{7}=$
5. $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-13}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{-13}=$
6. $\left(-\frac{2}{5}\right)^{10}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^{10}\cdot(-4)^{10}=$
7. $\frac{23^{15}}{(-46)^{15}}\cdot\frac{(-38)^{14}}{19^{14}}=$

Δ. Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς σε τυποποιημένη μορφή και στη συνέχεια να βρείτε το αποτέλεσμα στις πράξεις που ζητούνται:

$x = 0{,}0000000087$ $\quad y = 0{,}0000000075$ $\quad z = 0{,}000000025$

$a = 450.000.000.000.000$ $\quad b = 20.000.000.000.000$ $\quad c = 50.300.000.000$

1. $x \cdot z =$ $\quad$ 2. $y \cdot z =$ $\quad$ 3. $x + y =$ $\quad$ 4. $a \cdot b \cdot z =$ $\quad$ 5. $z \cdot c =$

Ε. Να χρησιμοποιήσετε ιδιότητες δυνάμεων για να απλοποιήσετε τις παραστάσεις και στο τέλος να αντικαταστήσετε με τους αριθμούς που δίνονται σε κάθε περίπτωση:

1. Αν $x = -\dfrac{1}{2022}$, $y = 2022$, βρείτε το: $\dfrac{\left(x^{-2} \cdot y\right)^{-3} \cdot \left(x^{2} \cdot y^{-3}\right)^{2}}{x^{9} \cdot y^{-10}} =$

2. Αν $x = -\dfrac{4}{5}$, $y = \dfrac{4}{5}$, βρείτε το: $\dfrac{\left(x^{2} \cdot y^{-3}\right)^{-1} \cdot \left(x^{-3} \cdot y\right)^{-2}}{x^{15} \cdot y^{10}} =$

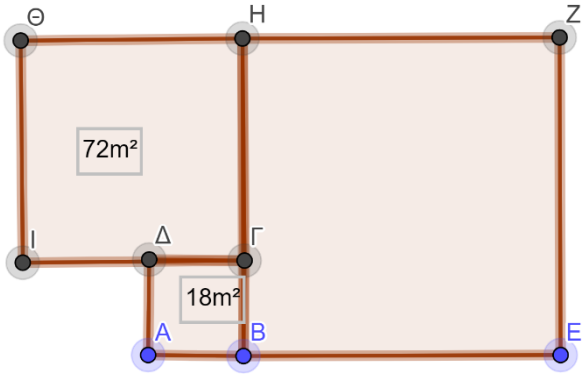
3. Αν $x = -16$, $y = \dfrac{1}{8}$, βρείτε την τιμή της παράστασης: $\left(x^{-1} \cdot y^{3}\right)^{2} \cdot \left(x^{-4} \cdot y^{-2}\right)^{-1} \cdot y^{-6} =$

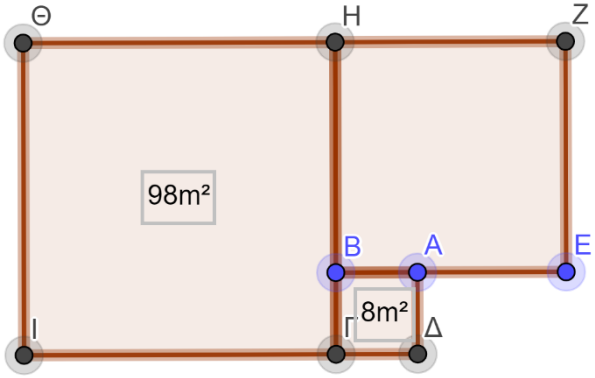
ΣΤ. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

1. $\left(2\sqrt{5}\right)^{2} + \left(3\sqrt{2}\right)^{2} =$ $\quad$ 2. $\sqrt{27} - \sqrt{12} + \sqrt{\sqrt{7 + (\sqrt{2})^{2}}} =$ $\quad$ 3. $3\sqrt{8} - \sqrt{18} + \sqrt{50} =$

4. $\sqrt{3}(\sqrt{12} - \sqrt{27}) =$ $\quad$ 5. $\sqrt{41 - \sqrt{21 + \sqrt{19 - \sqrt{9}}}} =$ $\quad$ 6. $\left(4\sqrt{3} - 5\right)\left(8\sqrt{3} + 10\right) =$

Ζ. Να βρείτε σε κάθε περίπτωση το εμβαδόν του τετραγώνου που λείπει:



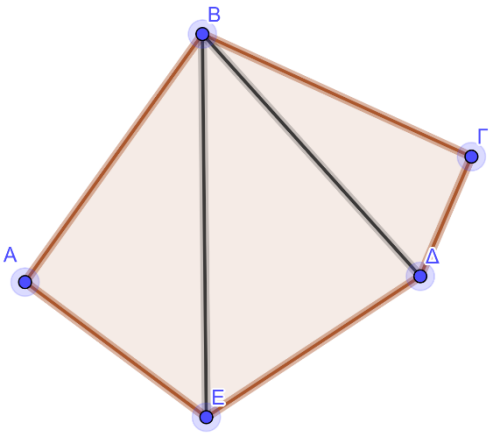


Η. Στις κάθετες πλευρές ΑΒ=8cm και ΑΓ=4cm ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα ώστε ΑΔ=2cm και ΑΕ=1cm. Να αποδείξετε ότι ΒΓ=4ΔΕ.

Θ. Στο διπλανό σχήμα, οι γωνίες Α, ΒΔΕ και Γ είναι ορθές και δίνονται τα μήκη των παρακάτω τμημάτων:

$AE = 4,\ BE = \sqrt{80},\ B\Delta = 2\sqrt{11},\ \Gamma\Delta = 2\sqrt{6}$

Να αποδείξετε ότι: ΕΔ=ΑΒ και να υπολογίσετε την περίμετρο του πενταγώνου ΑΒΓΔΕ.



§ 1.2, 1.3, 1.4

ΘΕΩΡΙΑ – ΟΡΙΣΜΟΙ

Αλγεβρική παράσταση είναι μια μαθηματική έκφραση που περιέχει αριθμούς και μεταβλητές που συνδέονται με οποιαδήποτε πράξη μεταξύ τους.

Ακέραια αλγεβρική παράσταση είναι η αλγεβρική παράσταση στην οποία οι εκθέτες των μεταβλητών είναι θετικοί ακέραιοι.

Μονώνυμο ονομάζεται η ακέραια αλγεβρική παράσταση στην οποία υπάρχει μόνο η πράξη του πολ/μου μεταξύ του αριθμητικού παράγοντα και των μεταβλητών καθώς και μεταξύ των μεταβλητών.
Ο αριθμητικός παράγοντας καλείται **συντελεστής** του μονωνύμου, ενώ **κύριο μέρος** ενός μονωνύμου είναι οι μεταβλητές με τους αντίστοιχους εκθέτες τους. Δύο μονώνυμα είναι **όμοια** αν έχουν το ίδιο κύριο μέρος.

Πολυώνυμο ονομάζεται η αλγεβρική παράσταση που είναι άθροισμα ή διαφορά μονωνύμων.
Προσοχή στα παρακάτω:

- Βαθμός ενός μονωνύμου ως προς κάποια μεταβλητή , είναι ο εκθέτης της αντίστοιχης μεταβλητής.
- Ως πολυώνυμα (μηδενικού βαθμού) μπορούν να θεωρηθούν και οι μη μηδενικοί αριθμοί.
- Ο αριθμός μηδέν μπορεί να θεωρηθεί πολυώνυμο (μηδενικό πολυώνυμο) αλλά δεν έχει βαθμό.
- Αριθμητική τιμή μιας παράστασης είναι ο αριθμός που προκύπτει για συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών.

ΠΡΟΣΘΕΣΗ (ΑΦΑΙΡΕΣΗ) ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ : Η πράξη είναι εφικτή μόνο μεταξύ όμοιων μονωνύμων. Το άθροισμα δύο όμοιων μονωνύμων έχει το ίδιο κύριο μέρος με αυτά και συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ (ΔΙΑΙΡΕΣΗ) ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ : Μπορεί να γίνει και μεταξύ μη όμοιων μονωνύμων. Πολλαπλασιάζουμε (διαιρούμε) τους συντελεστές και πολ/με (διαιρούμε) τα κύρια μέρη τους εφαρμόζοντας ιδιότητες δυνάμεων.
Δείτε μερικά παραδείγματα:

Οι παραστάσεις : $x,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}y^3,\ \frac{2}{3},\ -a^2,\ -x^2ay,\ \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)y^2x$ *είναι μονώνυμα ενώ*

οι παραστάσεις : $2xa^{-2},\ -3x+\sqrt{2}a,\ 2\left(x^2-a^2\right),\ \frac{3ax^2}{2y^3}$ *δεν είναι μονώνυμα.*

$\left(3-\sqrt{2}\right)x^3a^2$: *Μονώνυμο με συντελεστή* $\left(3-\sqrt{2}\right)$ *και κύριο μέρος* x^3a^2.

$2x^4y-3x^2y^3-5x+6$: *πολυώνυμο 4ου βαθμού ως προς x και 3ου ως προς y.*

$$2x(x^2-y^3x)-3y^2(1-yx^2)=2x^3-2y^3x^2-3y^2+3y^3x^2=2x^3-3y^2+y^3x^2$$

$$(2x-1)(x+2)(1-x)=\left(2x^2+4x-x-2\right)(1-x)=2x^2+4x-x-2-2x^3-4x^2+x^2+2x=$$
$$-2x^3-x^2+5x-2$$

$$(2x^4y^2a-3x^3ya^3+xya^2):\left(-6x^2y^3a\right)=\frac{2x^4y^2a}{-6x^2y^3a}+\frac{-3x^3ya^3}{-6x^2y^3a}+\frac{xya^2}{-6x^2y^3a}=-\frac{x^2}{3y}+\frac{xa^2}{2y^2}-\frac{a}{xy^2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. Να κάνετε τις σημειωμένες πράξεις, να τσεκάρετε από τις απαντήσεις αν το έχετε κάνει σωστά. Αν έχετε κάνει λάθη κοιτάξτε ξανά τις πράξεις μέχρι να καταλάβετε το γιατί. Όταν αυτό συμβεί, πηγαίνετε στην επόμενη άσκηση.

1. $-2x^3y^2\cdot(3xy-4x)+3xy^2\cdot\left(-2x^3y^2+x^3\right)=$

2. $a^2x\cdot(2x-a)-3ax^2\cdot(4a-3x)+2a^3\cdot(x^2-x)=$

3. $\left(2xy^3-a^2y\right)\cdot\left(-3x^2a+4y^2\right)+x^3y^3\cdot(2a-1)=$

4. $\left(3x^2-2ay\right)\cdot\left(9x^4+6ayx^2+4a^2y^2\right)-x\cdot\left(27x^5+a\right)=$

5. $(x-1)\cdot(2x+1)\cdot(2-x)-(2x-1)\cdot(x+2)\cdot(3-x)=$

6. $\left(4x^3y-5x^4y^3+2xy\right):x^2y-\left(6ax^2y+5ax^3y^2\right):axy=$

7. $\left(4x^2-4x+1\right)\cdot(2x-1)-(2x+1)\cdot\left(4x^2+4x+1\right)=$

8. $\left(2a^2-3a+1\right)\cdot(3-a)-(a+2)\cdot\left(3-4a-a^2\right)=$

9. $\left(3xy-2y^2\right)\cdot\left(3xy+2y^2\right)-y^2\cdot\left(9x^2-4y^2\right)=$

10. $(x-2)(2x-1)(-3+2x)-\left(x^2-3x-1\right)(x+3)=$

11. $\left(12x^3y^2-8x^2y^3-6xy^4\right):\left(-2x^4y^2\right)=$

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ:

1. $-6x^4y^3+11x^4y^2-6x^4y^4$ 2. $-10a^2x^2-3a^3x+9ax^3+2a^3x^2$

3. $-4x^3y^3a+8xy^5+3a^3yx^2-x^3y^3$ 4. $-8a^3y^3-ax$

5. $2x^2-12x+4$ 6. $-5x^2y^2-2x+\frac{2}{x}-5x^2y$ 7. $-24x^2-2$

8. $-a^3+15a^2-5a-3$ 9. 0 10. $3x^3-16x^2+19x-3$

11. $-\frac{6}{x}+\frac{4y}{x^2}+\frac{3y^2}{x^3}$

§1.5 ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

- $(\alpha+\beta)^2=(-\alpha-\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$
- $(\alpha-\beta)^2=(-\alpha+\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$
- $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=(-\alpha+\beta)(-\alpha-\beta)$

Ισχύουν:
- $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$
- $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$
  - $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$
  - $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$
  - $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Σε κάποιες υπάρχουν και απαντήσεις μέσα σε παρένθεση)

Α. Συμπληρώστε κατάλληλα τις παρακάτω ισότητες:

1. $(2x+1)^2=$
2. $(3-x)^2=$
3. $(3a-2b)^2=$
4. $\left(x+\frac{2}{x}\right)^2=$
5. $\left(3a+\frac{1}{a}\right)^2=$
6. $\left(y^3-a^2\right)^2=$
7. $\left(2x^3-x\right)^2=$
8. $\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}a\right)^2=$
9. $\left(\frac{3a^2}{2}-ax\right)^2=$
10. $\left(\sqrt{3}-2a^2\right)^2=$
11. $\left(-3x+\sqrt{2}\right)^2=$
12. $\left(-\frac{2a}{3}-y^2\right)^2=$
13. $\left(a^2y-ay^3\right)^2=$
14. $\left(-\frac{x}{3}+\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^2=$
15. $\left(-\frac{a^2}{y}-1\right)^2=$
16. $\left(-xy+\frac{1}{3}\right)^2=$
17. $\left(-1-\frac{2}{x^2}\right)^2=$
18. $\left(-\frac{a}{x}+\frac{x}{a}\right)^2=$

Β. Συμπληρώστε κατάλληλα τις παρακάτω ισότητες:

1. $\left(-\sqrt{3}-2x\right)\cdot\left(2x-\sqrt{3}\right)=$
2. $\left(a^2-ya\right)\cdot\left(a^2+ya\right)=$
3. $\left(-\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)\cdot\left(\frac{y}{3}+\frac{x}{2}\right)=$
4. $\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}-x^3\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}+x^3\right)=$
5. $\left[(a-y)+3ay\right]\cdot\left[(a-y)-3ay\right]=$
6. $\left[\sqrt{2x+3}-(a-2)\right]\cdot\left[\sqrt{2x+3}+(a-2)\right]=$
7. $(3a-2)^3=$
8. $(2-5x)^3=$
9. $\left(a^2+a\right)^3=$
10. $\left(2x^2+3\right)^3=$

Γ. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

1. $(2a-3)^2+(2a+3)^2-(4a-6)(2a+3)=$
2. $999999^2+1+1999998=$
3. $\left(a^2-xa\right)^2-\left(a-xa^2\right)^2-2(a-x)(-a-x)=$
4. $(x+2)^3+(1-x)^3+9(x-2)(1-x)=$
5. $(3x-5)^3-(2x-5)^3-3x(3x-5)(2x-5)=$

Δ. Να «συμπτύξετε» τα παρακάτω αναπτύγματα:

1. $4x^2+4x+1=$ 2. $9x^2-12xy+4y^2=$ 3. $x^2+\frac{1}{x^2}+2=$

4. $a^4+9b^6-6a^2b^3=$ 5. $x^4y^4+x^2y^2+\frac{1}{4}=$ 6. $x^4-4y^2ax^2+y^4a^2=$

7. $4x^2a^4+4a^8+x^4=$ 8. $16a^2+16ax^2+4x^4=$ 9. $\frac{4x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{2xy}{3}=$

10. $y^2+8yx^2+16x^4=$ 11. $4x^2+9a^4+12xa^3=$ 12. $25-10a^2y+a^4y^2=$

Ε. Συμπληρώστε τα κενά ώστε να ισχύουν οι ταυτότητες. Αν μπορείτε να βρείτε και παραπάνω από ένα τρόπους για να τις συμπληρώσετε , ακόμα καλύτερα!

1. $(2x+\quad)^2=12x+\quad+\quad$ 2. $(3a^2-\quad)^2=\quad-6a^2x+\quad$

3. $(a^2-\quad)^2=\quad-4a^3x+\quad$ 4. $(\quad+\quad)^2=4xy+x^2+\quad$

5. $(5y+\quad)^2=\quad+4a^2+\quad$ 6. $(3x^2a+\quad)^2=25+\quad+\quad$

7. $\left(\frac{2}{3}ax+\quad\right)^2=\quad+\frac{1}{4}+\quad$ 8. $\left(\frac{xy}{3}-\quad\right)^2=-2x^2y+\quad+\quad$

9. $\left(\frac{1}{2x}+\quad\right)^2=3+\quad+\quad$ 10. $(y-\quad)^2=\frac{4}{25}a^2-\quad+\quad$

11. $(a^2y+\quad)^2=a^3y+\quad+\quad$ 12. $\left(\frac{3a}{2}+\quad\right)^2=ay+\quad+\quad$

Ζ. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

1. $(2x-3)(4x^2+6x+9)-(3+2x)^3+54$ $(-54x-36x^2)$

2. $(3x^2-4)^2-(2x-5)^2+(2-x)(2+x)(x^2+4)$ $(8x^4-28x^2+7)$

3. $(ax-2a^2)^2+(2a^3+x)^2-(ax-2)(ax+2)$ $(4a^6+4a^4+x^2+4)$

4. $(2x-3)^3-(2x+3)^3-(3x+4)^2+(4-3x)^2$ $(-72x^2-48x-54)$

5. $(1-3a)^2-(2+a)(4-2a+a^2)-(2a-3)(4a^2+6a+9)$ $(-9a^3+9a^2-6a+20)$

6. $(3xa-2)(-3ax-2)(4+9x^2a^2)+(4-9x^2a^2)^2$ $(32-72a^2x^2)$

Η. Να αναπτύξετε σε γινόμενο τα παρακάτω αθροίσματα και διαφορές κύβων:

1. $8x^3-27=$ 2. $y^6-8=$ 3. $a^3x^3-1=$

4. $27x^3+1=$ 5. $y^6+a^3=$ 6. $x^6-1=$

Θ. Στηριγμένοι στο ότι αν $\alpha^2+\beta^2=0$, τότε απαραίτητα $\alpha=0$ και $\beta=0$, προσπαθήστε να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

1. $x^2+y^2+4x+2y+5=0$ 2. $x^2+y^2-6x+8y+25=0$

3. $4x^2+y^2+4x-6y+10=0$ 4. $x^2+9y^2-6x+12y+13=0$

Ι. Να βρείτε το αποτέλεσμα αφού κάνετε τα αναπτύγματα των ταυτοτήτων και τις αναγωγές όμοιων όρων:

$(1-3x)^2+(1+3x)^2-2(3x-1)(3x+1)=$ (4)

$(2x-3)^2-(2x+3)^2+6x(2-x)(2+x)=$ $(-6x^3)$

$(3xy-y^2)^2-2y^2(3x-y)(3x+y)+(3xy+y^2)^2=$ $(4y^4)$

$(x-2)(x^2+2x+4)-x(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})=$ $(8x-8)$

$\left[(3\sqrt{2}-5)(-5-3\sqrt{2})-\sqrt{47}\right]\cdot(7+\sqrt{47})=$ (2)

§1.6 ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Α. Απλώς βγάλτε κοινό παράγοντα:

1. $x^2-x=$ 2. $x^2+2x=$ 3. $2x-x^2=$

4. $4x^2-8x=$ 5. $2x-2=$ 6. $4x+2=$

7. $-3x+6=$ 8. $-5x-25=$ 9. $-5x+5=$

10. $4y+4=$ 11. $14x-4=$ 12. $24x+16=$

13. $4x^3+2x^2=$ 14. $8x^2-12x^3=$ 15. $6x^2y-3xy^2=$

16. $4a^3b^2+2ab^3-ab^2=$ 17. $3xy^3-6x^2y^2+xy^2=$ 18. $-3x^3y^2+9x^4y^4=$

Β. Συνεχίζουμε με κοινό παράγοντα:

1. $6x^3(x-a)-3x^2(x-a)=$

2. $2xy(x-2)^2-4x^2y(x-2)^3=$

3. $4x(x+3)^2-6x^2(x+3)=$

4. $2y(2y-1)+3(1-2y)=$

5. $4x(x-2)-2(2-x)=$

6. $2x(x+1)-7x-7=$

7. $3x(2x-1)-2x+1=$

8. $4x(2-3x)+4-6x=$

Γ. Ομαδοποιείστε τις παρακάτω ποσότητες (σε ζεύγη):

1. $3ax-6a+x-2=$

2. $2xy-4ay-x+2a=$

3. $2a^2-6a-ax+3x=$

4. $ax^2+a^2x-3x-3a=$

5. $3a^2x-6a^2-2yx+4y=$

6. $2a^3x^2+4ay^2+12xy^2+6a^2x^3=$

7. $3x+2ax-3a-2x^2=$

8. $2x(x-3)-3a(x-3)-4x+6a=$

Δ. Διαφορές τετραγώνων, από τις απλούστερες προς τις δυσκολότερες:

1. $4x^2-9=$ 2. $16-9a^2=$

3. $a^2x^4-25=$ 4. $a^4-4x^6=$

5. $x^4-a^4=$ 6. $a^2-4x^4=$

7. $(3x-2)^2-25=$ 8. $(2a+1)^2-(1-3a)^2=$

9. $(x-5)^2-4x^2=$ 10. $(x+5)^2-(1-3x)^2=$

11. $16x^2-(2x-3)^2=$

12. $(7-2x)^2-(3x-2)^2=$

13. $4x^2-(3x+1)^2=$

14. $4(2x-1)^2-9(x+2)^2=$

15. $4ax^2-9a=$

16. $2a^3x^4-8ax^8=$

17. $4a^2(x-2)-9(x-2)=$

18. $2x^4(x-1)+8x^2(1-x)=$

Ε. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις σαν τετράγωνο διωνύμων:

1. $4x^2+1+4x=$

2. $25+10x^2+x^4=$

3. $9a^2+12ax^2+4x^4=$

4. $a^2+\frac{9}{a^2}+6=$

5. $4x^2+9y^2+12xy=$

6. $a^2x^4+y^2+2ayx^2=$

7. $y^6+8y^3x^2+16x^4=$

8. $2x+1+x^2=$

9. $6a^3x^3+9a^4x^2+a^2x^4=$

10. $4xy^2+x^2+4y^4=$

11. $x^4+10x^2+25=$

12. $9a^2y^2+12ay^3+4y^4=$

ΣΤ. Έχουν κοινό παράγοντα , αλλά υπάρχει και συνέχεια:

1. $4x^2(x-3)-x+3=$

6. $16(x-3)^2-4a^2(3-x)^2=$

2. $9(2x-1)-2a^2x+a^2=$

7. $x^2(x-2)+4x(2-x)+4x-8=$

3. $x^2(a-2)-16(a-2)=$

8. $x^3(x+2)-4x(x+2)+ax^2+4ax+4a=$

4. $x^2(a+1)-4x(a+1)+4(a+1)=$

9. $x^2(2x-1)-3x(2x-1)+4x-2=$

5. $a^2(x-2)+4ay(x-2)+4y^2(x-2)=$

10. $x^2(2a-3)^3-4x(2a-3)^2+8a-12=$

Ζ. Ομαδοποίηση , προτιμήστε το τρεις – ένας και εφαρμόστε ταυτότητες:

1. $x^2+2x+1-a^2=$

7. $9x^2-9-y^2-6y=$

2. $x^2-2ax+a^2-16=$

8. $2x+4a^2-1-x^2=$

3. $1-x^2+2ax-a^2=$

9. $4x^2+12x+9-y^2+2ay-1=$

4. $9a^2-4x^2-4x-1=$

10. $y^2+\frac{4}{y^2}-5$

5. $25x^4+10x^2+1-9x^6=$

11. $27a^3-12ax^2-12ax-3a=$

6. $x^2+\frac{1}{x^2}+1=$

12. $x+\frac{1}{x}-3=$

Η. Διασπάστε κατάλληλα έναν από τους τρεις όρους και παραγοντοποιήστε:

1. $x^2-5x+6=$
2. $x^2-5xy-4y^2=$
3. $x^2+3x+2=$
4. $4x^2-7xy+3y^2=$
5. $x^2-4x-5=$
6. $3a^2-ay-2y^2=$
7. $x^2+3ax-4a^2=$
8. $x^2+ax-12a^2=$
9. $4x^2+8xy+3y^2=$
10. $4a^2-4ax-3x^2=$

Θ. Δοκιμάστε να τις παραγοντοποιήσετε , αφήνοντας και τη φαντασία σας ελεύθερη:

1. $(x-2a)^2(x-2)-4x^3+8x^2=$
2. $3a(2x+1)-2y(2x+1)-2yx^2+3ax^2=$
3. $x^2-y^2+4x-6y-5=$
4. $4x^2-9y^2-8x-6y+3=$
5. $3a^2x-(3x+2)(4x^2-12x+9)+2a^2=$
6. $(x^2-9)^2-4(x+3)^2=$
7. $3(x-2)(x^2-9)+7(2-x)(3-x)^2=$
8. $25x^2-9y^2-10x-12y+3=$
9. $x^2y^2(z^4+1)-(x^4+y^4)z^2=$
10. $x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y)+2xyz=$
11. $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=$
12. $xy(x-y)+yz(y-z)+xz(z-x)=$

Ι. Μερικές ασκήσεις με τις «μυστικές» ταυτότητες (Άθροισμα και διαφορά κύβων):

1. $8x^3-27=$
2. $a^3+8=$
3. $27+x^6=$
4. $(2x-1)^3+a^3x^3=$
5. $(1+2x)^3-8y^3=$
6. $(x+2)^3+(1-x)^3=$
7. $(2x+3)^3-(x-1)^3=$
8. $x^2(x^2-x+1)+x^4+x=$
9. $x^3-yx^2+xy-y+1=$
10. $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)=$

§1.8 ΕΚΠ και ΜΚΔ ακέραιων αλγεβρικών παραστάσεων

ΕΚΠ δύο ή περισσότερων ακέραιων αλγεβρικών παραστάσεων που <u>έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων</u>, ονομάζεται το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη του καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.
ΜΚΔ δύο ή περισσότερων ακέραιων αλγεβρικών παραστάσεων που <u>έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων</u>, ονομάζεται το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη του καθενός το μικρότερο από τους εκθέτες του.

Να βρείτε το ΕΚΠ και το ΜΚΔ των παρακάτω ομάδων αλγεβρικών παραστάσεων:

1. $12x^3a^2b,\ 16x^2a^4,\ 8x^3a^3b^2$
2. $2ab^3c^2,\ 3a^2bc^4,\ 6a^2bc^3$
3. $8x^2-8,\quad 6x^2-12x+6,\quad 4x^2-4x$
4. $x^4-4x^2,\quad (x^2-2x)(x^2+2x),\quad x^3-3x^2+2x$
5. $x^3-4x^2+4x,\quad x^3-4x,\quad (x-2)^3$

§1.9 Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις

Μια αλγεβρική παράσταση που είναι κλάσμα του οποίου οι όροι είναι πολυώνυμα , λέγεται ρητή.

Ο παρονομαστής ενός κλάσματος δεν πρέπει να είναι μηδέν. Αν η ρητή παράσταση που μας δίνεται έχει μία μόνο μεταβλητή, τότε περιορίζουμε κατάλληλα τις τιμές της μεταβλητής ώστε να έχει νόημα το κλάσμα, δηλαδή ζητάμε ο παρονομαστής να είναι διάφορος του μηδενός.
Αυτό πρακτικά σημαίνει πως λύνουμε την εξίσωση : παρονομαστής =0 και στη συνέχεια ζητάμε η μεταβλητή να μην παίρνει τις τιμές που είναι οι λύσεις της εξίσωσης.

Για να απλοποιήσουμε μια ρητή παράσταση πρέπει πρώτα να παραγοντοποιήσουμε αριθμητή και παρονομαστή.

Α. Να βρείτε για ποιες τιμές της μεταβλητής ορίζονται οι παρακάτω παραστάσεις και στη συνέχεια να τις απλοποιήσετε:

1. $\dfrac{x^2+3x}{x^2-9}$
2. $\dfrac{2x+1}{2x^2+2x}$
3. $\dfrac{x^3-4x}{x^3-4x^2+4x}$

Β. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

1. $\dfrac{x^2-y^2}{xy^2-x^2y}$
2. $\dfrac{a^2-4ab+4b^2}{a^2-4b^2}$
3. $\dfrac{(x+1)(x-2)^2-9(x+1)}{x^3+2x^2+x}$
4. $\dfrac{(3a+2)^2-(2a+1)^2}{25a^2-9}$
5. $\dfrac{9b^2-(a-1)^2}{3ab-a^2+a}$
6. $\dfrac{x^2-3ax+2a^2}{x^2+ax-2a^2}$

§1.10 Πράξεις ρητών παραστάσεων

Α. Να κάνετε τους παρακάτω πολ/μους – διαιρέσεις:

1. $\dfrac{x^2-y^2}{xy^2-x^2y}\cdot\dfrac{x^2y^2}{x^2+xy}$ 2. $\dfrac{a^2-4ab+4b^2}{a^2-4b^2}\cdot\dfrac{a^2+2ab}{ab-2ab^2}$

3. $\dfrac{(x+1)(x-2)^2-9(x+1)}{x^3+2x^2+x}:\dfrac{x^2-10x+25}{x^3+x}$

4. $\left(\dfrac{a-3}{a+2}\cdot\dfrac{4a+8}{a+3}\right):\dfrac{4a-8}{a+3}$ 5. $\dfrac{a+1}{a-4}:\left(\dfrac{3a+6}{a-4}\cdot\dfrac{a+1}{a+2}\right)$

Β. Να κάνετε τις σημειωμένες πράξεις (σε παρένθεση τα αποτελέσματα):

1. $\dfrac{y}{x}-\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{y^2}{x^2-xy}-\dfrac{x(x+y)}{2y(y-x)}$ $\left(\dfrac{x}{2y}\right)$

2. $\dfrac{x^2}{a}-\dfrac{a^2}{x}-\dfrac{x^2-2a^2-ax}{a+x}+\dfrac{(a-x)(a^2+x^2)}{ax}$ (a)

3. $\dfrac{x^3+2x^2y-y^3}{(x+y)^3}+\dfrac{2y}{x+y}-\dfrac{xy}{x^2+2xy+y^2}$ (1)

4. $\dfrac{a+x}{a-x}+\dfrac{a-2x}{a+x}+\dfrac{a^2+3x^2}{x^2-a^2}$ $\left(\dfrac{a}{a+x}\right)$

5. $\dfrac{a-2}{2a+1}+\dfrac{2a+1}{1-2a}-\dfrac{2-3a(2a+3)}{4a^2-1}$ (1)

6. $\dfrac{4}{a^2-x^2}+\dfrac{3x}{a^2x-a^3}-\dfrac{a-3x}{a^3-ax^2}$ $\left(\dfrac{3}{a^2}\right)$

7. $\dfrac{2(a-x)}{a^3+a^2x}+\dfrac{a+x}{a^3+ax^2+2a^2x}-\dfrac{5}{a^2+ax}$ $\left(-\dfrac{2}{a^2}\right)$

8. $\dfrac{a-3}{3a^2+a}-\dfrac{a+3}{a-3a^2}-\dfrac{a}{9a^2-1}+\dfrac{4a^2-7}{9a^3-a}$ $\left(\dfrac{1}{a}\right)$

9. $\dfrac{x+2}{x^2+7x+10}-\dfrac{x-3}{x^2-8x+15}+\dfrac{x^2-15}{x^2-25}$ (1)

10. $\dfrac{2x+1}{x^2-5x+6}-\dfrac{x+3}{x^2-x-6}-\dfrac{x+5}{x^2-4}-\dfrac{19}{x^3-3x^2-4x+12}$ $\left(\dfrac{2}{(x-2)(x-3)}\right)$

11. $\dfrac{x^2}{2a^2+2ax}-\dfrac{a^2}{3ax+3x^2}+\dfrac{a^2-2x^2}{3ax}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{a+6x}{6a+6x}$ $\left(-\dfrac{x}{6a}\right)$

12. $\dfrac{a+3}{a-2}-\dfrac{a+1}{a-1}-\dfrac{2a+1}{a^2-3a+2}$ $\left(\dfrac{1}{a-1}\right)$

13. $\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{x^2+x+1}{x^3-x^2+x-1}-\dfrac{x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1}+\dfrac{4x^2+3x}{1-x^4}$ $\left(\dfrac{x^3}{x^4-1}\right)$

14. $\dfrac{2x-4}{x^2-4x+3}-\dfrac{x+1}{x^2-x-6}-\dfrac{x+3}{x^2+x-2}-\dfrac{x^2-x-4}{(1-x)(2+x)(x+3)}$ $\left(\dfrac{1}{x^2+4x+3}\right)$

15. $\dfrac{1}{a^3-a^2x-a^2y+axy}+\dfrac{1}{y^3-y^2x-ay^2+axy}+\dfrac{1}{x^3-yx^2-ax^2+axy}$ $\left(\dfrac{1}{axy}\right)$