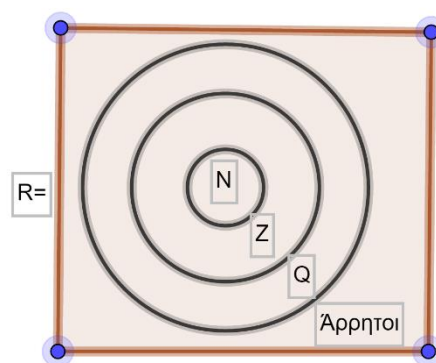


ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥΚΕΦΑΛΑΙΟ 2° - ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΥΛΗ- ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ2.1 Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους

- Τα σύνολα των αριθμών: Υπάρχουν:
οι φυσικοί αριθμοί $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, οι ακέραιοι $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$,
οι ρητοί $\mathbb{Q} = \{a/b, \text{ όπου } a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$.

Είναι προφανές (;) ότι ρητοί είναι όλα τα κλάσματα καθώς και όλοι οι αριθμοί που μπορούν να γραφτούν σαν κλάσμα, συνεπώς οι φυσικοί και οι ακέραιοι περιέχονται στους ρητούς. Προσοχή στους περιοδικούς δεκαδικούς, θυμηθείτε ότι μπορούν να γραφούν ως κλάσμα, συνεπώς περιλαμβάνονται στους ρητούς.

Ακόμα, υπάρχουν οι άρρητοι αριθμοί, δηλαδή οι αριθμοί που δεν μπορούν να γραφτούν σε μορφή κλάσματος. Για το $\sqrt{2}$ υπάρχει η σχετική απόδειξη στο βιβλίο. Γνωστοί άρρητοι αριθμοί είναι το π (3,14...) καθώς και οι $\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{6}, \dots$. Τέλος, η ένωση των ρητών και των άρρητων αριθμών φτιάχνει το σύνολο των πραγματικών αριθμών δηλαδή το $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\text{Άρρητοι})$. Δείτε το σχήμα:



- Οι δύο «νέες» ταυτότητες:
 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ και $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$, που έρχονται να συμπληρώσουν τις ήδη γνωστές:
 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- Μια «παλιά», λίγο χρησιμοποιημένη:
 $(a+b+\gamma)^2 = a^2 + b^2 + \gamma^2 + 2ab + 2b\gamma + 2a\gamma$, $(a+b-\gamma)^2 = a^2 + b^2 + \gamma^2 + 2ab - 2b\gamma - 2a\gamma$
- Οι συμβολισμοί που χρησιμοποιούμε για κάποιους ακέραιους αριθμούς, δηλαδή: Ο αριθμός a είναι άρτιος, αν υπάρχει ακέραιος k ώστε $a=2k$. Ο αριθμός a είναι περιττός αν υπάρχει ακέραιος k ώστε $a=2k+1$.
Ο αριθμός a είναι πολλαπλάσιο του 3, αν υπάρχει ακέραιος k ώστε $a=3k$. Ομοίως, ο αριθμός a είναι πολλαπλάσιο του 4, του 5, του 7 κ.λ.π, αν υπάρχει ακέραιος k ώστε αντίστοιχα να ισχύει $a=4k$, $a=5k$, $a=7k$ και πάει λέγοντας! Προσέξτε, σε όλα τα παραπάνω ο αριθμός a είναι επίσης ακέραιος.
- Το σύνολο των ακέραιων αριθμών, είναι κλειστό ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού (άρα και των δυνάμεων ακεραίων με εκθέτη φυσικό αριθμό), αλλά όχι ως προς τη διαίρεση, δηλαδή η διαίρεση δύο ακέραιων αριθμών δεν οδηγεί απαραίτητα σε ακέραιο.
- Οι μέθοδοι απόδειξης. Συγκεκριμένα, η ευθεία απόδειξη είναι που έχετε συνηθίσει και μάθει από το Γυμνάσιο. Ξεκινάμε από τα δεδομένα και κάνοντας επιτρεπτές πράξεις ή

δικαιολογημένους από τη θεωρία συλλογισμούς φτάνουμε στο ζητούμενο.

Για παράδειγμα, αν ζητηθεί να αποδείξουμε ότι ο αριθμός $a = 5 \cdot 2^{v+1} + 4 \cdot 5^{v+1}$ είναι πολλαπλάσιο του 10, δουλεύουμε ως εξής:

$$a = 5 \cdot 2^{v+1} + 4 \cdot 5^{v+1} = 5 \cdot 2 \cdot 2^v + 4 \cdot 5 \cdot 5^v = 10 \cdot 2^v + 20 \cdot 5^v = 10(2^v + 2 \cdot 5^v) = 10\kappa, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Παρατηρήστε ότι η ποσότητα μέσα στην παρένθεση είναι ακέραιος αριθμός και πήραμε την πρωτοβουλία να τον συμβολίσουμε με ένα γράμμα. Με αυτό τον τρόπο κάνατε και τις αποδείξεις των ιδιοτήτων των δυνάμεων.

Η άλλη μέθοδος απόδειξης είναι η απαγωγή σε άτοπο. Δηλαδή, δεχόμαστε ότι δεν ισχύει το ζητούμενο και κάνοντας επιτρεπτές πράξεις ή συλλογισμούς, καταλήγουμε σε κάτι που είναι λανθασμένο, συνεπώς η άρνηση του ζητούμενου ήταν λάθος, οπότε έχουμε ολοκληρώσει την απόδειξη.

Για παράδειγμα, αν πρέπει να αποδείξουμε ότι το άθροισμα ενός ρητού και ενός άρρητου είναι άρρητος αριθμός, μπορούμε να δουλέψουμε ως εξής: Έστω ότι ο ρ είναι ρητός και ο α είναι άρρητος. Έστω επίσης ότι το άθροισμά τους είναι ρητός! Τότε υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ ώστε $\rho = \kappa/\lambda$ και $\alpha + \rho = \mu/\nu$ δηλαδή έχουμε:

$$\alpha + \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\mu}{\nu} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\mu}{\nu} - \frac{\kappa}{\lambda} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\mu\lambda - \kappa\nu}{\lambda\nu}, \text{ δηλαδή ο } \alpha \text{ γράφεται σαν κλάσμα, συνεπώς ο } \alpha$$

είναι ρητός, που είναι άτοπο!! Συνεπώς, αποδείξαμε ότι ο $\alpha + \rho$ είναι άρρητος. Εννοείται πως στα παραπάνω κλάσματα, οι αριθμοί λ και ν δεν είναι μηδέν.

- Υπάρχουν ακόμα οι ιδιότητες των δυνάμεων με βάση πραγματικό αριθμό και εκθέτη ακέραιο, γνωστές από την ύλη της Β Γυμνασίου. Να υπενθυμίσω, όσον αφορά το πρόσημο, ότι ένας αρνητικός αριθμός που υψώνετε σε περιττό εκθέτη δίνει αρνητικό αποτέλεσμα. Σε κάθε άλλη περίπτωση το αποτέλεσμα της ύψωσης σε δύναμη είναι θετικός.

Ο αρνητικός εκθέτης σημαίνει απλώς ότι πρέπει να αντιστρέψουμε τη βάση και να κάνουμε τον εκθέτη θετικό.

Προσοχή!!! Αν έχετε μεταβλητές υψωμένες σε αρνητικό εκθέτη, έχετε την επιλογή να μην αντιστρέψετε, αλλά να προχωρήσετε σε πράξεις εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των δυνάμεων.

Για παράδειγμα, αν πρέπει να υπολογίσετε την ποσότητα $(a^{-2})^{-3}$, μπορείτε να γράψετε κατευθείαν το αποτέλεσμα a^6 και όχι $(1/a^2)^{-3} \dots$

- Από τις ιδιότητες των αναλογιών, πέραν της πασίγνωστης «χιαστί», δώστε σημασία στις παρακάτω ιδιότητες (θεωρήστε ότι οι παρονομαστές είναι γενικά διάφοροι του μηδενός, ώστε να ορίζονται τα αντίστοιχα κλάσματα):

$$\text{Αν } \frac{a}{b} = \frac{\gamma}{\delta} = \lambda \text{ τότε ισχύουν και τα παρακάτω: } \frac{a}{a+b} = \frac{\gamma}{\gamma+\delta} \text{ και } \frac{a}{b} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a+\gamma}{b+\delta} = \lambda.$$

Επίσης, να θυμάστε ότι ο πιο απλός τρόπος να αποδείξετε σχέσεις με αναλογίες ή να λύσετε ασκήσεις με αυτές, είναι να συμβολίζετε με ένα γράμμα (το λ στην περίπτωσή μας)

την τιμή της ισότητας δύο λόγων: $\frac{a}{b} = \frac{\gamma}{\delta} = \lambda$ και στη συνέχεια να αντικαθιστάτε τα a και γ

με τις ποσότητες λb και $\lambda \delta$ αντίστοιχα.

- Μεγάλη προσοχή στις περιπτώσεις:**

Αν $a\beta = 0$ τότε $a = 0$ ή $\beta = 0$, ενώ αν $a\beta \neq 0$ τότε $a \neq 0$ και $\beta \neq 0$.

Επίσης, θυμηθείτε ότι (οτιδήποτε)^{2v}, όπου v ακέραιος, είναι μη αρνητική ποσότητα.

2.2 Διάταξη πραγματικών αριθμών

- Στα δύο μέλη μιας ανίσωσης μπορούμε να επεμβούμε με τους παρακάτω τρόπους:
 1. Αν $a < b \Leftrightarrow a \pm \gamma < b \pm \gamma$
 2. Αν $a < b$ και γ θετικός τότε: $a < b \Leftrightarrow a\gamma < b\gamma$ και $\frac{a}{\gamma} < \frac{b}{\gamma}$
 3. Αν $a < b$ και γ αρνητικός τότε: $a < b \Leftrightarrow a\gamma > b\gamma$ και $\frac{a}{\gamma} > \frac{b}{\gamma}$
 4. Αν a, b ομόσημοι τότε: $a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
 5. Αν a, b θετικοί αριθμοί και n φυσικός, τότε: $a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$
- Αν έχουμε δύο ή περισσότερες ομοιότροφες ανισώσεις μπορούμε να τις προσθέσουμε κατά μέλη και να προκύψουν ομοιότροφες επίσης ανισώσεις.
Αν, επιπλέον, όλοι οι όροι των ομοιότροφων ανισώσεων είναι θετικοί αριθμοί, τότε επιτρέπεται να πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη τις ανισότητες.
!!!!Δεν επιτρέπεται η αφαίρεση και η διαίρεση κατά μέλη δύο ανισοτήτων, όποιους περιορισμούς και αν βάλετε!!!!
- Επειδή ισχύει ότι :
 (οτιδήποτε)^{2κ} ≥ 0, για κάθε $\kappa \in \mathbb{Z}$, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι :
 1. Αν $a^{2\kappa} \leq 0$ τότε $a = 0$
 2. Αν $a^{2\kappa} + b^{2\nu} = 0$ ή $a^{2\kappa} + b^{2\nu} \leq 0$ τότε $a = 0$ και $b = 0$.
- Αν δίνονται κάποιες ανισοτικές σχέσεις και σας ζητούν να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται κάποιες νέες ποσότητες, θυμηθείτε ότι για να σχηματίσετε την ποσότητα $a-b$ θα πρέπει να την έχετε στο μυαλό σας ως $a+(-b)$, ενώ την ποσότητα $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$, αφού δεν επιτρέπεται η κατά μέλη αφαίρεση ή διαίρεση ανισοτήτων.
- Συνηθίστε να μετατρέπετε τις ανισώσεις σε διαστήματα και αντίστροφα. Κλειστό διάστημα σημαίνει ότι στην ανισότητα πρέπει να υπάρχει και το «ίσον». Επίσης, πρέπει να μπορείτε να συναληθεύσετε ανισώσεις ακόμα και χωρίς τη χρήση άξονα! Σκεφτείτε ότι αν οι ανισώσεις είναι ομοιότροφες, η μία από αυτές καλύπτει και όλες τις υπόλοιπες. Αν δεν είναι ομοιότροφες, τότε η συναληθεύση θα οδηγεί σε διάστημα με άκρα πραγματικούς αριθμούς ή δεν θα συναληθεύουν καθόλου οι ανισώσεις.
- Αν a, b πραγματικοί αριθμοί και κ περιττός τότε αν $a < b \Leftrightarrow a^\kappa < b^\kappa$.

2.3 Απόλυτες τιμές

- Ο ορισμός της απόλυτης τιμής, μας επιτρέπει να «βγάζουμε» την απόλυτη τιμή, μόνο εάν γνωρίζουμε το πρόσημο της ποσότητας που περιέχεται σε αυτήν. Δηλαδή, $|A| = A$ αν το A είναι μη αρνητικός, ενώ $|A| = -A$ αν αυτό το A είναι αρνητικός.
 Αν δεν γνωρίζουμε το πρόσημο και θέλουμε να γράψουμε την παράσταση χωρίς την απόλυτη τιμή, είμαστε υποχρεωμένοι να διακρίνουμε περιπτώσεις.
 Για παράδειγμα, αν δίνεται ότι $2 < a < 3$, η παράσταση $K = |a-2| - |a-3|$ γράφεται ως εξής:

$K=a-2+a-3=2a-5$. Χωρίς την συνθήκη, θα έπρεπε να πάρουμε περιπτώσεις ως εξής:
Αν $a \leq 2$, $K=-a+2+a-3=-1$, αν $2 < a < 3$ θα ήταν $K=2a-5$, ενώ αν $a \geq 3$, η $K=a-2-a+3=1$.

- Μπορούμε, με βάση τον ορισμό, να λύνουμε εξισώσεις της μορφής $|f(x)|=a$, $a > 0$. Συγκεκριμένα, $|f(x)|=a \Rightarrow f(x)=a$ ή $f(x)=-a$.

Ισχύει ακόμα ότι $|f(x)|=0 \Leftrightarrow f(x)=0$.

- Προσοχή στις ιδιότητες:
 $-|x| \leq x \leq |x|$, $|x|^2=x^2$ και η τριγωνική ανισότητα: $||a|-|b|| \leq |a+b| \leq |a|+|b|$.

Επίσης, ισχύουν οι προφανείς $|ab|=|a| \cdot |b|$ και $|\frac{a}{b}|=\frac{|a|}{|b|}$. Η πρώτη ισχύει και για περισσότερους από δύο όρους.

- Η γεωμετρική ερμηνεία της απόλυτης τιμής, είναι ότι το $|a|$ εκφράζει την απόσταση (άρα μη αρνητικός αριθμός!) του αριθμού a από το 0 , στην ευθεία των πραγματικών αριθμών, ενώ το $|a-b|$ την απόσταση των αριθμών a και b , επίσης πάνω στην ευθεία των αριθμών. Συμβολικά: $d(x,0)=|x|=|-x|$, $d(a,b)=|a-b|=|b-a|$. Όπως βλέπετε, μπορείτε αν θέλετε να αλλάξετε το πρόσημο της ποσότητας μέσα στο απόλυτο!

- Ισχύουν οι σχέσεις:

$$|x| \leq a \xleftrightarrow{a>0} -a \leq x \leq a \text{ και } |x| \geq a \xleftrightarrow{a>0} x \geq a \text{ ή } x \leq -a.$$

Αν $a < 0$, η πρώτη ανίσωση είναι αδύνατη, ενώ η δεύτερη είναι ταυτότητα.

Στην ενότητα αυτή, το βιβλίο επιμένει να μπορείτε να συνδυάσετε τη γεωμετρική ερμηνεία με τις ανισώσεις και τα διαστήματα στα οποία ανήκει η μεταβλητή. Για παράδειγμα:

$|x-2| < 5$, σημαίνει πως ψάχνουμε αριθμούς ώστε η απόστασή τους από το 2 να είναι το πολύ 5 μονάδες, δηλαδή $d(x,2) < 5$, οπότε αν "ανεβοκατέβουμε" 5 μονάδες από το 2 , πάμε από το -3 ως το 7 , δηλαδή $-3 < x < 7$ ή $x \in (-3,7)$.

Αν δίνεται ότι $x \in [-5,1]$, βρίσκω το μεσαίο αριθμό των $-5,1$ που είναι το -2 .

Αυτό απέχει 3 μονάδες από κάθε άκρο, συνεπώς θέλουμε τους αριθμούς οι οποίοι απέχουν έως και τρεις μονάδες από το -2 , δηλαδή $|x+2| \leq 3 \Leftrightarrow d(x,-2) \leq 3$.

Βέβαια, μπορείτε να επιλύετε και αλγεβρικά, στηριγμένοι στις ισοδυναμίες που περιγράψαμε αρχικά, αλλά αυτό θα αξιοποιηθεί στις ασκήσεις επόμενης ενότητας.

- Επειδή το αποτέλεσμα μιας απόλυτης τιμής είναι γενικά μη αρνητικός αριθμός, ισχύει ότι αν $|a|+|b|=0$ τότε υποχρεωτικά $a=0$ και $b=0$.
- Αν πρέπει να γράψουμε μια παράσταση που περιέχει απόλυτη ή απόλυτες τιμές χωρίς τις απόλυτες τιμές και δεν έχει δοθεί κανένας περιορισμός, πάμε σε διάκριση περιπτώσεων χρησιμοποιώντας (για διευκόλυνση!) ένα κατάλληλο πινακάκι, όπως θα δείτε στο παράδειγμα. Η συνάρτηση με τον παρακάτω τύπο να γραφτεί χωρίς απόλυτα:
 $f(x)=2|x-1|-|2-x|+x+3$. Οι ποσότητες μέσα στα απόλυτα μηδενίζονται για $x=1$ και $x=2$ συνεπώς διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

Αν $x \in (-\infty, 1)$, $x - 1 < 0$, $2 - x > 0$ άρα :

$$f(x) = 2|x - 1| - |2 - x| + x + 3 = -2x + 2 - 2 + x + x + 3 = 3$$

Αν $x \in [1, 2]$, $x - 1 \geq 0$, $2 - x \geq 0$ άρα :

$$f(x) = 2|x - 1| - |2 - x| + x + 3 = 2x - 2 - 2 + x + x + 3 = 4x - 1$$

Αν $x \in (2, +\infty)$, $x - 1 > 0$, $2 - x < 0$ άρα :

$$f(x) = 2|x - 1| - |2 - x| + x + 3 = 2x - 2 + 2 - x + x + 3 = 2x + 3$$

2.4 Ρίζες

- Το πλέον βασικό είναι να κατανοήσετε τον ορισμό. Ό,τι υπάρχει μέσα σε ρίζα καθώς και το αποτέλεσμα οποιασδήποτε ρίζας, πρέπει να είναι μη αρνητικός αριθμός (δηλαδή μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός) ανεξάρτητα με την τάξη της ρίζας. Έτσι λοιπόν, ισχύει πάντοτε ότι $\sqrt[n]{a} \geq 0$, για κάθε $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. Επίσης, εξαιτίας του ορισμού, ισχύουν:

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \text{ και } \sqrt{a^2} = |a| \text{ ενώ, εφόσον } a \geq 0, (\sqrt[n]{a})^n = a \text{ και } (\sqrt{a})^2 = a.$$

- Προσοχή: Η $\sqrt[n]{a}$ είναι η μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης $x^n = a$. Η εξίσωση μπορεί να έχει και αρνητική ρίζα, ανάλογα με το αν το n είναι άρτιος ή περιττός.
- Εφόσον το a είναι θετικός αριθμός, μπορούμε να χρησιμοποιούμε το συμβολισμό:

$$\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}, \text{ όπου } k \text{ ακέραιος και } n \text{ φυσικός. Οι ιδιότητες των δυνάμεων, ισχύουν κανονικά και για τους ρητούς εκθέτες.}$$

- Υπάρχουν εκτός από τις γνωστές ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών που επεκτείνονται και για τις n -οστές ρίζες, οι παρακάτω νέες ιδιότητες:

$$1. \sqrt[k]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[kp]{a} \quad 2. (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k} \quad 3. a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b} \quad \text{και} \quad 4. \sqrt[k]{a^{np}} = \sqrt[k]{a^n}. \text{ όπου οι } a, b \text{ είναι θετικοί αριθμοί.}$$

- Συζυγής παράσταση μιας άρρητης παράστασης (δηλαδή παράστασης που περιέχει ρίζα κάποιας ποσότητας), είναι αυτή με την οποία πολ/ντας την άρρητη παράσταση, διώχνουμε τη ρίζα. Συνεπώς, όταν στον παρονομαστή ενός κλάσματος έχουμε ποσότητα με ρίζα, πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή του κλάσματος με τη συζυγή του παρονομαστή. Δείτε μερικά παραδείγματα:

Αρχική	Συζυγής	Αποτέλεσμα
$\sqrt[5]{a^2}$	$\sqrt[5]{a^3}$	a
$\sqrt{x^2 + 1}$	$\sqrt{x^2 + 1}$	$x^2 + 1$
$\sqrt{x + 2} - 3$	$\sqrt{x + 2} + 3$	$x + 2 - 9 = x - 7$
$2x - \sqrt{x^2 + 1}$	$2x + \sqrt{x^2 + 1}$	$4x^2 - x^2 - 1 = 3x^2 - 1$

- Αν πρέπει να συγκρίνουμε ριζικά διαφορετικών τάξεων, οφείλουμε υψώνοντας σε δύναμη όση το ΕΚΤ των τάξεων των ριζών να απαλείψουμε τα ριζικά. Δείτε το παρακάτω παράδειγμα: $\sqrt[4]{3}, \sqrt[3]{2} \xrightarrow{(\quad)^{12}} 3^3 = 27, 2^4 = 16$ άρα $\sqrt[4]{3} > \sqrt[3]{2}$

- Προσοχή στο εξής: Αν $a > 1$, τότε ισχύει $a^k < a^l \Leftrightarrow k < l$ για κάθε $k, l > 0$. Αν $0 < a < 1$ η ανισότητα αντιστρέφεται: $a^k < a^l \Leftrightarrow k > l$ για κάθε $k, l > 0$.
Σχετική άσκηση: Αν $0 < a < 1 < b$ τότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ισχύει η παρακάτω σχέση:
 $0 < a^2 < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < 1 < \sqrt[3]{b} < \sqrt{b} < b^2$
- Αν πρέπει να κάνουμε πολλαπλασιασμούς ή/και διαιρέσεις με ριζικά διαφορετικών τάξεων, οφείλουμε να μετατρέψουμε κατάλληλα τα ριζικά ώστε να αποκτήσουν ίδια τάξη ρίζας. Αυτό γίνεται πάλι χρησιμοποιώντας το ΕΚΠ των τάξεων των ριζών ή μετατρέποντας τα ριζικά σε δυνάμεις με ρητούς εκθέτες, όπως στα παρακάτω παραδείγματα:
 $\sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt[12]{a^{10}} \cdot \sqrt[12]{a^4} \cdot \sqrt[12]{a^6} = \sqrt[12]{a^{20}} = \sqrt[3]{a^5} = a \cdot \sqrt[3]{a^2}$
ή $\sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{5}{6}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = a^{\frac{20}{6}} = a^{\frac{5}{3}} = a \cdot a^{\frac{2}{3}}$
- Προσοχή: Αν μια αλγεβρική ποσότητα εντός τετραγωνικής ρίζας μπορεί να γραφτεί σαν τέλειο τετράγωνο, τότε δεν απαιτείται περιορισμός αλλά διώχνοντας τετράγωνο με ρίζα πρέπει να βάλουμε το αποτέλεσμα μέσα σε απόλυτη τιμή:
 $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$ και γενικά: $\sqrt{f^2(x)} = |f(x)|$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3- ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

3.1 Εξισώσεις 1^{ου} βαθμού

A. Παραμετρικές

Πρώτη επαφή με την έννοια της παραμέτρου. Τι είναι παράμετρος; Ένα γράμμα, διαφορετικό από τον άγνωστο, του οποίου τις τιμές ρυθμίζουμε εμείς και βρίσκουμε αν υπάρχει λύση ή όχι στην εξίσωση ανάλογα με αυτές. Η βασική ιδέα είναι ότι κάθε πρωτοβάθμια εξίσωση φροντίζουμε να τη φέρνουμε πρώτα στη μορφή $Ax=B$, όπου οι ποσότητες A και B μπορούν να περιέχουν παράμετρο ή παραμέτρους. Στη συνέχεια διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Αν $A \neq 0$ (εδώ λύνουμε ως προς την παράμετρο) η εξίσωση έχει μία λύση: $x = \frac{B}{A}$

Στη συνέχεια δίνουμε στην παράμετρο την ή τις τιμές που μηδένιζαν το A και η εξίσωση παίρνει πλέον τη μορφή $0x=B$, οπότε και τη χαρακτηρίζουμε αδύνατη (αν $B \neq 0$) ή ταυτότητα (αν $B=0$).

Για παράδειγμα, αν πρέπει να λύσουμε την εξίσωση: $a^2(x-2) = -4(a-x) + 2a$, δουλεύουμε ως εξής:

$$a^2(x-2) = -4(a-x) + 2a \Leftrightarrow a^2x - 2a^2 = -4a + 4x \Leftrightarrow a^2x - 4x = 2a^2 - 4a \Leftrightarrow$$

$$(a^2 - 4)x = 2a(a-2) \quad (*)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

$$\text{Αν } a^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow a \neq 2 \text{ και } a \neq -2, \text{ η εξίσωση έχει μία λύση: } x = \frac{2a(a-2)}{(a-2)(a+2)} = \frac{2a}{a+2}$$

Για $a=2$, η (*) γράφεται: $0x=0$ και είναι ταυτότητα.

Για $a=-2$, η (*) γράφεται: $0x=16$ και είναι αδύνατη.

B. Κλασματικές

Ξεκινάμε περιορίζοντας τους παρονομαστές (μπορεί να χρειαστεί και παραγοντοποίηση τους αν είναι

δευτεροβάθμιοι) να είναι διάφοροι του μηδενός και στη συνέχεια κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών. Η λύση «κρίνεται» πάντα ως δεκτή ή μη δεκτή σε σχέση με τους περιορισμούς.

Γ. Εξισώσεις με απόλυτες τιμές

Υπάρχουν οι δύο πρώτες κλασικές εξισώσεις $|f(x)| = a \xrightarrow{a>0} f(x) = a \text{ ή } f(x) = -a$ και $|f(x)| = |g(x)| \Rightarrow f(x) = g(x) \text{ ή } f(x) = -g(x)$

αλλά χρειάζεται προσοχή η τρίτη περίπτωση :

$|f(x)| = g(x)$. Απαιτούμε $g(x) \geq 0$ και στη συνέχεια λύνουμε την εξίσωση $f(x) = g(x)$ ή $f(x) = -g(x)$.

Κρίνουμε το αποτέλεσμα πάντα σε σχέση με τον αρχικό περιορισμό.

3.2 Η εξίσωση της μορφής $x^n = a$

Αν n άρτιος και a θετικός, έχουμε δύο ακριβώς ρίζες, τις $x = \sqrt[n]{a}$ ή $x = -\sqrt[n]{a}$

Αν n άρτιος και a αρνητικός, είναι αδύνατη.

Αν n περιττός και a θετικός, υπάρχει μόνο μία ρίζα, η $x = \sqrt[n]{a}$

Αν n περιττός και a αρνητικός, υπάρχει μόνο μία ρίζα, η $x = -\sqrt[n]{-a}$. Δείτε τα παρακάτω παραδείγματα:

a. $x^4 = 81 \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{81} \Rightarrow x = \pm 3$, $x^2 = 10 \Rightarrow x = \pm \sqrt{10}$

b. Οι εξισώσεις $x^2 = -9$, $x^4 = -2$ είναι αδύνατες.

c. $x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$, $x^5 = 243 \Rightarrow x = \sqrt[5]{243} = 3$

d. $x^3 = -8 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{8} = -2$, $x^5 = -243 \Rightarrow x = -\sqrt[5]{243} = -3$

3.3 Εξισώσεις 2^{ου} βαθμού

A. Οι βασικές περιπτώσεις, αν το τριώνυμο δεν είναι συμπληρωμένο:

$$ax^2 = b \Rightarrow x^2 = \frac{b}{a} \xrightarrow{\frac{b}{a} > 0} x = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}, \quad ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x = -\frac{b}{a}$$

B. Μιλώντας για τις λεγόμενες παραμετρικές, δηλαδή δευτεροβάθμια πολυώνυμα που εκτός της μεταβλητής x περιέχουν και κάποιο ή κάποια άλλα γράμματα (λ , μ , a κ.λ.π) τα οποία χαρακτηρίζονται παράμετροι. Η εκφώνηση τέτοιων ασκήσεων, περιέχει συνήθως ζητούμενο του στυλ: «Βρείτε την τιμή της παραμέτρου ώστε το τριώνυμο/εξίσωση να έχει...». Παραθέτω ένα πίνακα όπου φαίνονται τα ζητούμενα και απέναντι η απαίτηση που εσείς πρέπει να προβάλλετε και να επιλύσετε. Όπου βλέπετε $f(x)$, εννοώ δευτεροβάθμιο πολυώνυμο του x .

Ζητούμενο	Απαίτηση
Η εξίσωση να έχει δύο πραγματικές ρίζες	$\Delta \geq 0$
Η εξίσωση να έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες	$\Delta > 0$
Η εξίσωση να έχει δύο ίσες ρίζες (μία διπλή)	$\Delta = 0$
Η εξίσωση να έχει δύο θετικές ρίζες	$\Delta \geq 0$ και $s > 0$ και $p > 0$
Η εξίσωση να έχει δύο αρνητικές ρίζες	$\Delta \geq 0$ και $s < 0$ και $p > 0$
Η εξίσωση να έχει δύο ετερόσημες ρίζες	$p < 0$ (τότε οπωσδήποτε $\Delta > 0$)

Η ανίσωση $f(x) > 0$, να ισχύει για κάθε x πραγματικό αριθμό	$\Delta < 0$ και $a > 0$
Η ανίσωση $f(x) < 0$, να ισχύει για κάθε x πραγματικό αριθμό	$\Delta < 0$ και $a < 0$
Η εξίσωση να έχει αντίθετες ρίζες	$s = 0$ και αφού βρεις το " λ ", ελέγχεις και αν η Δ είναι θετική.
Η εξίσωση να έχει δύο αντίστροφες ρίζες	$p = 1$ και αφού βρεις το " λ ", ελέγχεις και αν η Δ είναι θετική.
Η εξίσωση να είναι αδύνατη ή το τριώνυμο να έχει σταθερό πρόσημο	$\Delta < 0$

Γ. Αν στην εκφώνηση της άσκησης, περιγράφεται σχέση ανάμεσα στις ρίζες του τριωνύμου (για παράδειγμα: Η μια ρίζα είναι τριπλάσια της άλλης ή η μία ρίζα ισούται με το τετράγωνο της άλλης ή η διαφορά των δύο ριζών ισούται με...), ξεκινήστε γράφοντας τις ιδιότητες με τα s και p και επιλύστε το σύστημα που προκύπτει. Προσοχή! Αφού βρείτε τις τιμές της παραμέτρου, γυρίστε στην αρχική εξίσωση και επιβεβαιώστε ότι όντως το τριώνυμο έχει δύο ρίζες για τις τιμές της παραμέτρου που βρήκατε.

Δ. Προσέξτε την περίπτωση όπου το a του τριωνύμου είναι παράσταση που περιέχει παράμετρο. Περιορίστε το συντελεστή του x^2 , ώστε να μη μηδενίζεται και μετά χρησιμοποιήστε τις απαιτήσεις για διακρίνουσα, άθροισμα και γινόμενο ριζών. Ακόμα καλύτερα, δώστε στην παράμετρο την τιμή που μηδενίζει το a και ελέγξτε αν η συνθήκη που περιγράφεται στην εκφώνηση πληρείται.

Ε. Αν η εκφώνηση είναι: βρείτε τις τιμές της παραμέτρου ώστε η ανίσωση $f(x) \geq 0$ να ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x , απαιτείστε η διακρίνουσα να είναι μικρότερη ή ίση του μηδενός και το a να είναι θετικό. Ελέγξτε ξεχωριστά την περίπτωση όπου το a είναι μηδέν (αν υπάρχει τέτοιο ενδεχόμενο). Δουλεύουμε ανάλογα στην περίπτωση όπου η παράσταση $f(x)$ πρέπει να είναι αρνητική για κάθε πραγματικό αριθμό x , δηλαδή ζητώ $\Delta < 0$ αλλά και $a < 0$.

ΣΤ. Δύο αντίστροφες ρίζες, μπορεί να είναι και ίσες, στην περίπτωση που μιλάμε για τους αριθμούς 1 ή (-1). Είναι δυνατόν σε αυτή την περίπτωση να έχουμε $\Delta = 0$ και $p = 1$. Αναφέρομαι στις εξισώσεις:

$$(x - 1)^2 = 0 \text{ και } (x + 1)^2 = 0.$$

Δύο αντίθετες ρίζες που είναι ίσες, είναι μόνο η τιμή μηδέν. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο στην περίπτωση της εξίσωσης $ax^2 = 0$ με $a \neq 0$.

Ζ. Όποτε σας ζητηθεί να χρησιμοποιήσετε παράσταση που περιέχει τις ρίζες ρ_1 και ρ_2 ενός τριωνύμου, προσπαθήστε να εκφράσετε την παράσταση σαν συνάρτηση των s και p , τα οποία φυσικά και θα υπολογίσετε. Στην προσπάθειά σας αυτή, θυμηθείτε τις παρακάτω ταυτότητες:

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = (\rho_1 + \rho_2)^2 - 2\rho_1\rho_2 = s^2 - 2p.$$

$$\rho_1^3 + \rho_2^3 = (\rho_1 + \rho_2) \cdot (\rho_1^2 - \rho_1\rho_2 + \rho_2^2) = s^3 - 3ps$$

Η. Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Αν ένα τριώνυμο έχει ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 τότε μπορεί να γραφτεί στη μορφή: $a(x - x_1)(x - x_2)$.

$$x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2), \quad 2x^2 - 5x - 3 = 2(x + 1)\left(x - \frac{3}{2}\right) = (x + 1)(2x - 3)$$

Για παράδειγμα:

$$(ρίζες \text{ οι αριθμοί } -1, 2) \quad (ρίζες \text{ οι αριθμοί } -1, \frac{3}{2})$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4- ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ**4.1 Ανισώσεις 1^{ου} βαθμού**

A. Η απλή περίπτωση: Πρωτοβάθμιες χωρίς παραμέτρους. Τις αντιμετωπίζουμε όπως ακριβώς και τις εξισώσεις, αλλά όταν φθάνουμε στη διαίρεση με το συντελεστή του αγνώστου, αντιστρέφουμε την ανίσωση αν ο συντελεστής είναι αρνητικός ενώ την αφήνουμε ίδια αν ο συντελεστής είναι θετικός.

B. Συναλήθευση ανισώσεων. Αν πρέπει να βρούμε τις τιμές της μεταβλητής για τις οποίες δύο ή περισσότερες ανισώσεις έχουν κοινές λύσεις, είναι προτιμότερο να φτιάξουμε τον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρούμε - αν υπάρχουν - τα κοινά διαστήματα. Μπορούμε όμως και με «το μάτι»:
Αν οι ανισώσεις είναι ομοιόστροφες, η συναλήθευσή τους είναι πάντα η μία από τις δύο! Δείτε τα

παραδείγματα: α. $\begin{matrix} x \geq -1 \\ x > 2 \end{matrix} \Rightarrow x > 2, x \in (2, +\infty)$ β. $\begin{matrix} x \leq -1 \\ x < 2 \end{matrix} \Rightarrow x \leq -1, x \in (-\infty, -1]$

Αν είναι ετερόστροφες, τότε ή δεν συναληθεύουν ή το αποτέλεσμα είναι το διάστημα με άκρα τους αντίστοιχους αριθμούς:

α. $\begin{matrix} x \geq -1 \\ x < 2 \end{matrix} \Rightarrow -1 \leq x < 2, x \in [-1, 2)$ β. $\begin{matrix} x \leq -1 \\ x > 2 \end{matrix} \Rightarrow \text{Δεν υπάρχουν κοινές λύσεις}$

Γ. Ανισώσεις με απόλυτες τιμές. Απομνημονεύστε τις δύο παρακάτω περιπτώσεις:

$$|f(x)| \leq a \xrightarrow{a>0} -a \leq f(x) \leq a \quad \text{ενώ} \quad |f(x)| \geq a \xrightarrow{a>0} f(x) \geq a \quad \text{ή} \quad f(x) \leq -a. \text{ Αν το } a \text{ είναι αρνητικός αριθμός, τότε η πρώτη είναι αδύνατη, ενώ η δεύτερη ταυτότητα. Ειδικά οι ανισώσεις:}$$

$$|f(x)| \leq 0 \longleftrightarrow \text{ισχύει μόνο αν } f(x) = 0,$$

$$\text{ενώ η } |f(x)| \geq 0 \longleftrightarrow \text{ισχύει για κάθε } x \text{ εκτός από αυτά για τα οποία } f(x) = 0$$

Αν η ανίσωση έχει ποσότητα με x μέσα σε απόλυτη τιμή και παράσταση με x εκτός απόλυτης τιμής, παίρνουμε περιπτώσεις βγάζοντας την απόλυτη τιμή. Δείτε το παράδειγμα:

$$|2x - 1| < x + 3. \text{ Αν } 2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}, \text{ η ανίσωση γράφεται: } 2x - 1 < x + 3 \Leftrightarrow x < 4$$

$$\text{και τελικά } x \in \left[\frac{1}{2}, 4\right).$$

$$\text{Αν } x < \frac{1}{2} \text{ η ανίσωση γράφεται: } -2x + 1 < x + 3 \Leftrightarrow -3x < 2 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$$

$$\text{και τελικά } x \in \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right). \text{ Άρα, συνολικά } x \in \left(-\frac{2}{3}, 4\right)$$

Αν έχουμε ανίσωση με δύο απόλυτες τιμές, υψώνουμε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο και τη λύνουμε σαν δευτεροβάθμια ανίσωση, οπότε κοιτάζτε την επόμενη παράγραφο!

4.2 Ανισώσεις δευτέρου βαθμού

Για να λύσουμε μια ανίσωση 2^{ου} βαθμού, της μορφής $ax^2 + bx + c > 0$ (ή < 0) με $a \neq 0$, υπολογίζουμε τη διακρίνουσα και έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

A. $\Delta < 0$

Σε αυτήν την περίπτωση, το τριώνυμο είναι ομόσημο του a για κάθε x πραγματικό αριθμό. Αυτό σημαίνει πως οι ανισώσεις είτε είναι αδύνατες είτε ισχύουν για κάθε x πραγματικό. Δείτε:

$2x^2 + x + 3 > 0$ Είναι $\Delta = -23$, άρα παίρνει μόνο θετικές τιμές, συνεπώς η ανίσωση ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$2x^2 + x + 3 \leq 0$ Είναι $\Delta = -23$, άρα παίρνει μόνο θετικές τιμές, συνεπώς η ανίσωση είναι αδύνατη.

$x^2 + 3 \leq 0$, είναι αδύνατη αφού η ποσότητα είναι θετική για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$3x^2 + 5 > 0$, ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B. $\Delta = 0$

Αυτό δηλώνει πως το τριώνυμο μπορεί να γραφτεί σαν τετράγωνο διωνύμου και συνεπώς διατηρεί πρόσημο για κάθε x εκτός από την μοναδική τιμή που το μηδενίζει. Ανάλογα δίνουμε την απάντησή μας:

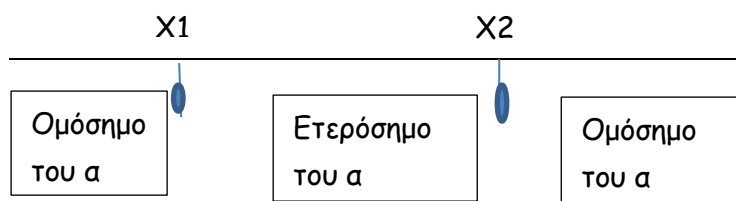
$x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 0$ συνεπώς ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η ανίσωση $(x+1)^2 < 0$ είναι αδύνατη.

Η ανίσωση $x^2 - 4x + 4 > 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 > 0$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{2\}$.

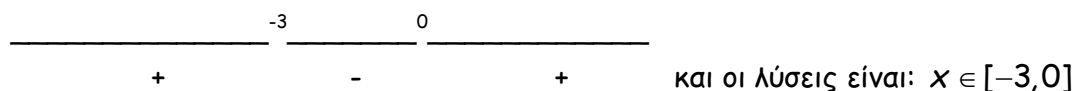
Γ. $\Delta > 0$ ή υπάρχουν δύο άνισες ρίζες οι οποίες βρίσκονται με παραγοντοποίηση ή άλλο τρόπο.

Πριν απαντήσουμε στην ανίσωση φτιάχνουμε πινακάκι με τα πρόσημα:



Δείτε τα παρακάτω παραδείγματα:

$x^2 + 3x \leq 0 \Leftrightarrow x(x+3) \leq 0$. Οι ρίζες είναι τα 0 και -3 , συνεπώς το πινακάκι είναι:



$2x - x^2 < 0$, ρίζες οι 0, 2

-	+	-
0	2	

 άρα $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

$x^2 - 2x - 3 > 0$, ρίζες οι $-1, 3$

-	+	-
-1	3	

 άρα $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

$$x^2 - 9 \leq 0, \text{ ρίζες οι } -3, 3 \quad \begin{array}{c} - \quad + \quad - \\ \text{---} -3 \text{---} 3 \text{---} \end{array} \quad \text{άρα } x \in [-3, 3]$$

Προσοχή!!!

Δεν είναι απαραίτητο να βρίσκουμε τη διακρίνουσα αν μπορούμε να «δούμε» εύκολα το πρόσημο - για παράδειγμα όλες οι παραστάσεις της μορφής $ax^2 + b$ με $a, b > 0$ διατηρούν θετικό πρόσημο για κάθε x πραγματικό αριθμό. Επίσης, για τις μορφές $ax^2 + bx$, $x^2 - b^2$ μπορούμε «βλέποντας» τις ρίζες να φτιάχνουμε απευθείας το πινακάκι.