ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ – ΓΕΠ3 – 2122

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να δείξετε ότι:

i. Ολες οι συναρτήσεις της μορφής G(x)=F(x)+c είναι επίσης παράγουσες της f.

ii. Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή: G(x)=F(x)+c.

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Fermat

Α3. Να χαρακτηρίσετε την παρακάτω πρόταση ως Αληθή ή Ψευδή και να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας: «Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι $\lim_{x\to x_o} f(x)=0,\ x_o\in\mathbb{R}$, τότε $\lim_{x\to x_o}\frac{1}{f(x)}=-\infty$ ή $\lim_{x\to x_o}\frac{1}{f(x)}=+\infty$ »

Α4. Να χαρακτηρίσετε ως Σωστό ή Λάθος κάθε έναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:

α. Κάθε γνήσια μονότονη συνάρτηση είναι και 1-1

β. Η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f , μπορεί να έχει κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της ίδιας συνάρτησης.

γ. Αν για μια συνεχή συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ ισχύει η σχέση: $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx,\ \ \alpha,\beta,\gamma\in\Delta$ τότε πρέπει απαραίτητα β=γ.

δ. Για μια συνάρτηση που είναι συνεχής , παραγωγίσιμη και γνήσια αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, ισχύει ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$.

ε. Για μια συνάρτηση f που είναι συνεχής, παραγωγίσιμη και περιττή σε ένα διάστημα Δ, δεν μπορεί να υπάρχουν τιμές α, β του Δ με α<β , ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο [α, β].

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\begin{cases} e^x-\beta x-1, & x<0\\ 2x^3-3x^2+\alpha, & x\geq 0\end{cases}$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Δίνεται ότι η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R.

Β1. Να αποδείξετε ότι α=0 και β=1. **(4 μονάδες)**

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. **(6 μονάδες)**

Β3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της. **(6 μονάδες)**

Β4. Να περιορίσετε κατάλληλα την τιμή του πραγματικού αριθμού k, ώστε η εξίσωση $f(x)=\eta\mu k+k-1$ να έχει δύο ακριβώς ρίζες. **(4 μονάδες)**

Β5. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζουν η C_f , ο οριζόντιος άξονας και οι ευθείες x=1, x=-1 **(5 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο R , $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και ισχύει για αυτήν ότι: $2e^{f(x)}+f(x)=x+2,\ x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι f(0)=0 και να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα – αν υπάρχουν - της συνάρτησης f. **(3+3 μονάδες)**

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κοίλη στο R. **(2+4 μονάδες)**

Γ3. Να αποδείξετε ότι $\int_{a}^{a+1} f(x)dx < \int_{a+1}^{a+2} f(x)dx$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$. **(5 μονάδες)**

Γ4. Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της f και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της C_f, του άξονα χ΄χ και των ευθειών x=0, x=2e-1. **(3+5 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $f:(1,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι f(e)=0 και

$$xf'(x) - f(x) = -xe^{\frac{f(x)}{x}}, \text{ για κάθε } x > 1.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = -x\ln(\ln x)$. **(5 μονάδες)**

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της και να βρείτε την εφαπτομένη της στο x_o=e. **(5+2 μονάδες)**

Δ3. Να βρείτε τη μονοτονία και το σύνολο τιμών της και να αποδείξετε ότι η εξίσωση $a(\ln x)^x = 1, \ x > 1$, έχει μία ακριβώς λύση για κάθε α>0. **(6+2 μονάδες)**

Δ4. Να αποδείξετε ότι: $\int_{2}^{e} f(x)dx > \frac{(e-2)^2}{2}$ **(5 μονάδες)**