Ασκήσεις στις δευτεροβάθμιες εξισώσεις της Α΄ Λυκείου

1. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

a. $\frac{x+1}{2x+1}+\frac{2x-1}{x-1}=2$ $(0\ ,-2)$

b. $\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x-3}=2$ $(1,\ 2)$

c. $\frac{2}{x-1}+1=\frac{10}{x+2}$ $(3,\ 4)$

d. $2-\frac{5}{x-2}=\frac{2x-x^2}{4-x^2}$ $(6,\ -3)$

e. $\frac{3x+1}{x^2+x}-\frac{x+3}{x}=\frac{x-3}{x+1}-1$ $(1,\ 2)$

f. $\frac{x+2}{x-3}-\frac{3-x}{x}=\frac{x^2+6}{x^2-3x}$ $(3,\ 5)$

g. $\frac{x}{x+2}-\frac{5x-20}{x^2-4x}=-\frac{14}{x^2+2x}$ $(1,\ 4)$

h. $\frac{x-10}{x^2-4}-\frac{x}{2-x}=\frac{2}{x+2}$ $(2,\ -3)$

i. $\frac{x+1}{x-3}-\frac{x}{3x-9}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2x-6}$ (-18)

2. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

1. $2x^5-32x=0$ 2. $x^6+64x^3=0$ 3. $(x+3)^5+32=0$ 4. $(x-2)^4+1=0$

5. $(2x-1)^4-8(2x-1)=0$ 6. $(x+3)^5+(2x+6)^2=0$

3. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

1. $(x+3)^2-2|x+3|-3=0$ $(0,-6)$

2. $(2x-4)^2+3|x-2|-7=0$ $(3,1)$

3. $(1-2x)^2+|4x-2|-3=0$ $(0,\ 1)$

4. $(3x-6)^2-|12-6x|+1=0$ $(5,\ -1)$

5. $6\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+50=0$ $\left(2,\ \frac{1}{2},\ 3,\ \frac{1}{3}\right)$

6. $3w^4-4w^2+1=0$ $\left(1,\ -1,\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

7. $8\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-2\left(\frac{2-x}{x+1}\right)-1=0$ $(3,\ 1)$

8. $(x-3)(x+1)(x+2)(x-4)=36$ $\left(1,\ 1\pm\sqrt{13}\right)$

4. Δίνεται η εξίσωση: $2a^2x-ax-1=0,\quad a\neq 0.$

α. Να αποδείξετε ότι έχει δύο άνισες ετερόσημες ρίζες για κάθε $a\neq 0$.

β. Να βρείτε το α, αν η απόσταση των εικόνων των ριζών του είναι ίση με $\frac{3}{4}$.

γ. Για α=2, να βρείτε την δευτεροβάθμια εξίσωση που έχει ρίζες τις διπλάσιες των ριζών της αρχικής εξίσωσης.

5. Δίνεται η εξίσωση $x^2-3x-2=0$ και έστω α και β οι ρίζες της.

α. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων: $K=a^2+\beta^2,\quad L=a^3+\beta^3,\ M=\frac{a}{\beta^2}+\frac{\beta}{a^2}$

Βασίλης Μπακούρος

β. Να βρείτε το τριώνυμο με ρίζες τους αριθμούς $a^2\beta$ $\kappa\alpha\iota$ $a\beta^2$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - \sqrt{L} \cdot x + M = 0$

6. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (k-1)x - 16 = 0,\ k \in \mathbb{R}$..

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες για κάθε τιμή του k.

β. Αν γνωρίζετε ότι ο λόγος των ριζών του είναι ίσος με -4, να βρείτε τις ρίζες και τον αριθμό k.

7. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2kx + 27 = 0, k \in \mathbb{R}$.

α. Αν υποθέσετε ότι έχει δύο άνισες ρίζες με τη μία να είναι τριπλάσια της άλλης, να βρείτε την τιμή του k καθώς και τις ρίζες.

β. Είναι δεκτές οι τιμές που βρήκατε; Ελέγξτε τη διακρίνουσα.

8. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + (k-2)x - 8 = 0,\ k \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες για κάθε τιμή του πραγματικού k.

β. Αν η μία ρίζα ισούται με το τετράγωνο της άλλης, να βρείτε τις ρίζες και τον k.

9. Αν ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 3ax - \beta = 0,\ a, \beta \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι ο αριθμός β είναι ρίζα της εξίσωσης: $3x^2 + 8a^2x + 4a^4 = 0$. Μπορείτε να βρείτε το πρόσημο των ριζών καθώς και την άλλη ρίζα του 1ου τριωνύμου;

10. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (k-1)x + k - 2 = 0,\ k \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες.

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του k η εξίσωση έχει:

i. Δύο θετικές ρίζες ii. Δύο αρνητικές ρίζες iii. Δύο ετερόσημες ρίζες

iv. Δύο αντίθετες ρίζες v. Δύο αντίστροφες ρίζες.

11. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + (2k-1)x + k^2 - 2 = 0,\ k \in \mathbb{R}$.

α. Βρείτε για ποιες τιμές του k η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες.

β. Να βρείτε το k ώστε να έχει δύο αντίστροφες ρίζες.

γ. Να βρείτε το k ώστε να έχει δύο αντίθετες ρίζες.

12. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - (2a+1)x + a^2 + a = 0,\quad a \in (-1, 0)$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου ως συνάρτηση του α.

β) Να βρείτε το πρόσημο των ριζών του τριωνύμου.

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $x^2 - 2(a+1)x + 1 = 0$

13. Δίνεται η εξίσωση: $(a-2)x^2 + 2(a+1)x + a - 2 = 0$

α) Να λύσετε την εξίσωση για α=2.

β) Αν $\alpha \neq 2$,να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση έχει δύο αντίστροφες ρίζες.

γ) Αν γνωρίζετε ότι η εξίσωση έχει δύο αντίστροφες ρίζες και η μία από αυτές είναι η $x_1 = 2 - \sqrt{3}$, να βρείτε την άλλη ρίζα της και την τιμή του α για την οποία ισχύει η πρόταση.

Βασίλης Μπακούρος