ΕΠ-3 - 2122

Α2. Αληθής, απόδειξη σχολ. βιβλίου.

Α3. Λάθος - Λάθος - Λάθος

Α4. Τα γ-δε είναι λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $v(t) = x'(t) = 6t^2 - 18t + 12 = 6(t^2 - 3t + 2)$, $a(t) = 12t - 18$

Β2. $v(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ ή $t = 2s$.

Β3.

	0		1		3/2		2		3
$v(t)$		+	0	−		−	0	+	
$a(t)$		−		−	0	+		+	
		επιβ.		επιτ.		επιβ.		επιτ.	

Β4. $S_{ολ} = |x(1) - x(0)| + |x(3/2) - x(1)| + |x(2) - x(3/2)| + |x(3) - x(2)|$

$\Rightarrow S_{ολ} = 5 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 5 = 11\,m$ και $v_M = \frac{11}{3}\,m/s$

ΘΕΜΑ Β

$$f(x) = \sqrt[3]{|x-2|^4} = \begin{cases} \sqrt[3]{(2-x)^4}, & x<2 \\ \sqrt[3]{(x-2)^4}, & x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -\frac{4}{3}\sqrt[3]{2-x}, & x<2 \\ \frac{4}{3}\cdot\sqrt[3]{x-2}, & x \geq 2 \end{cases}$$

η f παρ/μη στο 2 γιατί: $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{\sqrt[3]{(2-x)^4}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^4}}{x-2} = 0$.

Β2. $f(3) = 1$, $f'(3) = \frac{4}{3}$, $y - 1 = \frac{4}{3}(x-3) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - 3$

Β3. Αν η εφαπτ. ευθεία στο $(x_0, f(x_0))$ περνά από το $(0,0)$, πρέπει:

$-f(x_0) = f'(x_0)(-x_0) \Rightarrow f(x_0) = x_0 f'(x_0) \Rightarrow$

$\sqrt[3]{(x_0-2)^4} = \frac{4}{3}x_0 \cdot \sqrt[3]{x_0-2}$. Θέτω $\omega = \sqrt[3]{x_0-2} \Rightarrow x_0 = \omega^3 + 2$

άρα: $\omega^4 = \frac{4}{3}(\omega^3+2)\cdot\omega \Rightarrow 3\omega^4 = 4\omega^4 + 8\omega \Rightarrow \omega(\omega^3+8) = 0 \Rightarrow$

$\omega = 0$ ή $\omega = -2$, δεκτή η $\omega = 0$, δηλαδή $x_0 = 2$.

Ομοίως, αν $x<2$: $\sqrt[3]{(2-x_0)^4} = -\frac{4}{3}x_0 \cdot \sqrt[3]{2-x_0} \Rightarrow \omega^4 = \frac{4}{3}(-2+\omega^3)\cdot\omega$

$3\omega^4 = -8\omega + 4\omega^4 \Rightarrow \omega(\omega^3 - 8) = 0$, $\omega = 0$ ή $\omega = 2 \Rightarrow x_0 = 10$, μη δεκτή

Δεκτή, άρα $x_0 = 2$ δηλ. τέμνει ο άξονας xx', η ευθεία $y = 0$.

ΘΕΜΑ Γ

Η ευθεία $y=-x-5$ συμπίπτει με την $y=f'(1)x-f'(1)+f(1)$
άρα $f'(1)=-1$ και $1+f(1)=-5 \Rightarrow f(1)=-6$

Γ2. α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(3-x)+x+4}{x^2-2x} \overset{y=3-x}{=} \lim\limits_{y\to 1}\dfrac{f(y)+3-y+4}{(3-y)^2-2(3-y)}$

$= \lim\limits_{y\to 1}\left[\dfrac{f(y)+6}{(3-y)(1-y)}+\dfrac{1-y}{(3-y)(1-y)}\right] = -\dfrac{1}{2}\cdot f'(1)+\dfrac{1}{2} = 1$

b. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xf(x)+6}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xf(x)-6x+6x+6}{x^2-x} =$

$\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x(f(x)+6)}{x(x-1)}-\dfrac{6(x-1)}{x(x-1)}\right] = f'(1)-6=-7$

Γ3. Είναι $(x-1)^{x-1}=e^{(x-1)\cdot\ln(x-1)}$ συνεπώς η παράγωγός της
ισούται με: $(x-1)^{x-1}\cdot(\ln(x-1)+1)$ άρα
$g'(x)=f'(x^2-3)\cdot 2x+(x-1)^{x-1}\cdot[\ln(x-1)+1]$, συνεπώς
$g(2)=f(1)+1=7$, $g'(2)=-4+1=-3$ άρα η εφαπτ. είναι
η: $y-7=-3(x-2) \Rightarrow y=-3x+13$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $x-1\le f(x)-e^x \Rightarrow f(x)\ge e^x+x-1$.
Επίσης: $f(\ln x)-\ln x\le x-1 \xrightarrow[y=\ln x]{} f(y)-y\le e^y-1 \Rightarrow$
$f(y)\le e^y+y-1$ συνεπώς $f(x)=e^x+x-1$, $f\uparrow$ και
$f(0)=0$ άρα $f(x)<0$ για $x<0$ και $f(x)>0$ για $x>0$.

Γ2. Αν $x>0$, $2^x<3^x$ και $4^x<5^x$ άρα $f(2^x)+f(4^x)<f(3^x)+f(5^x)$.
Ομοίως, αν $x<0$, $f(2^x)+f(4^x)>f(3^x)+f(5^x)$, συνεπώς μόνη λύση $x=0$.

Γ3. Είναι $x'(t)=2\,m/s$ και για $x(t)>0$, $(OAM)=\dfrac{x(t)\cdot f(t)}{2}$
$\Rightarrow E(t)=\frac{1}{2}x(t)\cdot(e^{x(t)}+x(t)-1) \Rightarrow E'(t)=\frac{1}{2}x'(t)(e^{x(t)}+x(t)-1)+$
$\frac{1}{2}x(t)\cdot(x'(t)\cdot e^{x(t)}+x'(t))$, για $x(t_0)=\ln 2$ είναι
$E'(t_0)=(4\ln 2+1)\,m^2/s$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $f'(x) = \frac{\alpha}{x}$. Η εξίσωση εφ/νης είναι: $y = f'(x_0)x - x_0 f'(x_0) + f(x_0)$ και ζητώ να ταυτίζεται με την $y = -2x+1$ δηλαδή να υπάρχει x_0 ώστε $f'(x_0) = -2 \Rightarrow \frac{\alpha}{x_0} = -2$ και $-x_0 \cdot (-2) + \alpha \ln x_0 + 2 = 1 \Rightarrow$

$2x_0 - 2x_0 \ln x_0 + 1 = 0.$

Έστω $g(x) = 2x \cdot (1 - \ln x) + 1$. Είναι $g(e) = 1 > 0$, $g(e^2) = -2e^2 + 1 < 0$ και g συνεχής στο $[e, e^2]$, άρα (Θ. Bolzano) $\exists\, x_0 \in (e, e^2)$ ώστε $g(x_0) = 0$. Συνεπώς πράγματι υπάρχει x_0 ώστε η εφ/νη στο $(x_0, f(x_0))$ να είναι η $y = -2x+1$.

Δ2. Η συνάρτηση $g(x) = 2x(1 - \ln x) + 1$ με $A_g = (1, +\infty)$ είναι γνήσια αύξουσα γιατί αν $x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \ldots$ ή με χρήση της παραγώγου, $g'(x) = -2\ln x < 0$ για κάθε $x > 1$, συνεπώς $g \searrow$ στο $(1, +\infty)$ δηλαδή το x_0 είναι μοναδικό.

Δ3. Στη σχέση $2x_0 - 2x_0 \ln x_0 + 1 = 0$, αντικαθιστώ το x_0 με $-\frac{\alpha}{2}$ και γίνεται: $2\left(-\frac{\alpha}{2}\right) + 2 \cdot \frac{\alpha}{2} \ln\left(-\frac{\alpha}{2}\right) + 1 = 0 \Rightarrow -\alpha + \alpha \ln\left(-\frac{\alpha}{2}\right) + 1 = 0$

$\Rightarrow \alpha \cdot (\ln(-\alpha) - \ln 2) = \alpha - 1 \Rightarrow \ln(-\alpha) = 1 + \ln 2 - \frac{1}{\alpha}.$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Παίρνω τις εξισώσεις των εφ/νων και ζητώ να ταυτίζονται:

$$\left.\begin{aligned} y &= f'(x_1)x - x_1 f'(x_1) + f(x_1) \\ y &= g'(x_2)x - x_2 g'(x_2) + g(x_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} & f'(x_1) = g'(x_2) \text{ και} \\ & -x_1 f'(x_1) + f(x_1) = -x_2 g'(x_2) + g(x_2) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \frac{2}{x_1^2} = -2x_2 - 2$ και $-x_1 \cdot \left(\frac{2}{x_1^2}\right) - \frac{2}{x_1} = -x_2(-2x_2 - 2) - x_2^2 - 2x_2$

$\Rightarrow \frac{1}{x_1^2} = -x_2 - 1$ και $-\frac{4}{x_1} = x_2^2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} = -\frac{x_2^2}{4} \Rightarrow \frac{1}{x_1^2} = \frac{x_2^4}{16}$

$\Rightarrow \frac{x_2^4}{16} = -x_2 - 1 \Rightarrow x_2^4 + 16x_2 + 16 = 0 \Rightarrow \ldots x_2 = -2$

άρα $x_1 = -\frac{4}{x_2^2} \Rightarrow x_1 = -1$

Η κοινή τους εφαπτομένη είναι η $y = 2x + 4$ και εφάπτεται στο $(-1, 2)$ στην C_f και στο $(-2, 0)$ στην C_g.

Δ2. Αρκεί νδο υπάρχει $\alpha<0$ ώστε $f'(\alpha)=e^{\alpha}-\alpha \Rightarrow \frac{2}{\alpha^2}=e^{\alpha}-\alpha$.

Θεωρώ τη συνάρτηση με τύπο $h(x)=e^{x}-\frac{2}{x^2}$ -*

και $h(-1)=\frac{1}{e}-2+1<0$, $h(-2)=\frac{1}{e^2}-\frac{1}{2}+2>0$, h συν. στο $[-2,-1]$

άρα υπάρχει $\alpha\in(-2,-1)$ ώστε $h(\alpha)=0$.

Έστω ότι υπάρχουν a,b με $a,b<0$ ώστε οι τιμές της C_f σε αυτά να είναι παρ/λες μεταξύ τους. Τότε θα ισχύει:

$\frac{2}{a^2}=\frac{2}{b^2} \Leftrightarrow a=b$ ή $a=-b$, με τη δεύτερη λύση να είναι μη δεκτή. Συνεπώς, το α είναι μοναδικό.

Δ3. Έστω $N(x,f(x))$, $M(-2,0)$, συνεπώς

$NM=\sqrt{(x+2)^2+\frac{4}{x^2}}$ και $x(t_0)=-1$, $x'(t)=1$ μ/s.

Είναι $NM=d(t)=\sqrt{(x(t)+2)^2+\frac{4}{x^2(t)}} \Rightarrow$

$$d'(t)=\frac{2(x(t)+2)\cdot x'(t)-\frac{4}{x^4(t)}\cdot 2x(t)\cdot x'(t)}{2\sqrt{(x(t)+2)^2+\frac{4}{x^2(t)}}}$$ συνεπώς τη

χρονική στιγμή t_0, $d'(t_0)=\frac{2+8}{2\cdot\sqrt{5}}=\sqrt{5}$ μ/s.