ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} = \begin{cases} (1-x)^{2/3}, & x<1 \\ (x-1)^{2/3}, & x \geq 1 \end{cases}$ συνεπώς:

$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{3\cdot\sqrt[3]{1-x}}, & x<1 \\ \dfrac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x-1}}, & x>1 \end{cases}$ ενώ η f δεν είναι παράγωγη στο 1

αφού: $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x-1} = +\infty$.

Δ2. $g(x) = f(e^x+1) + f(e^{-x}+1) = \sqrt[3]{e^{2x}} + \sqrt[3]{e^{-2x}} = e^{\frac{2x}{3}} + e^{-\frac{2x}{3}}$

άρα g παράγωγη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = \dfrac{2}{3}e^{\frac{2x}{3}} - \dfrac{2}{3}e^{-\frac{2x}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ3. Ζητώ x_0 ώστε $g'(x_0) = 1 \Rightarrow \dfrac{2}{3}\left(e^{\frac{2x_0}{3}} - e^{-\frac{2x_0}{3}}\right) = 1 \Rightarrow$

(Θέτω $\omega = e^{\frac{2x_0}{3}}$) $\quad 2\omega - \dfrac{2}{\omega} = 3 \Rightarrow 2\omega^2 - 3\omega - 2 = 0$ $\begin{cases} \omega = 2 \\ \text{ή} \\ \omega = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Η τιμή $\omega = -1/2$ είναι μη δεκτή, συνεπώς $e^{\frac{2x_0}{3}} = 2 \Rightarrow$

$\dfrac{2x_0}{3} = \ln 2 \Rightarrow x_0 = \dfrac{3\ln 2}{2}$, άρα το σημείο είναι

το $\left(\dfrac{3\ln 2}{2}, g\left(\dfrac{3\ln 2}{2}\right)\right) = \left(\dfrac{3\ln 2}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$.