ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $x^2+2 \geq 0$ ενώ $-1 \leq ημx \leq 1$ άρα η εξίσωση $x^2+2 = ημx$ είναι αδύνατη. Ζητώ $f'(x_0)=1 \Rightarrow 2x_0 = 1 \Rightarrow x_0 = 1/2$ και η εφ/νη της C_f στο $x_0 = \frac{1}{2}$ είναι η $y - \frac{9}{4} = x - \frac{1}{2} \Rightarrow y = x + \frac{7}{4}$.

Για την $g(x)$ θα ζητούσαμε $g'(x_1) = 1 \Rightarrow συνx_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 2κπ,\ κ \in \mathbb{Z}$ δηλ. θα υπήρχαν άπειρες τέτοιες εφ/νες.

Για να διέρχεται από το $(0,0)$ μια τέτοια εφ/νη, θα έπρεπε:

$-g(x_1) = -x_1 \Rightarrow ημx_1 = x_1$ δηλ. $x_1 = 0$ άρα θα ήταν η $y = x$.

Γ2. Ζητούμε να ταυτίζονται οι:

$$y = f'(x_0)\cdot x - x_0 f'(x_0) + f(x_0), \quad y = g'(x_1)x - x_1 g'(x_1) + g(x_1)$$

δηλ. $2x_0 = συνx_1$ και $-2x_0^2 + x_0^2 + 2 = -x_1 συνx_1 + ημx_1 \Rightarrow$

$x_0 = \frac{1}{2}συνx_1$ δηλ. η εξίσωση: $2 - \frac{1}{4}συν^2 x_1 = -x_1 συνx_1 + ημx_1$ να έχει λύση στο $x_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x) = 2 - \frac{1}{4}συν^2 x + x\,συνx - ημx$,

$h(\pi/2) = 2 - 1 = 1 > 0$ $\quad h(\pi) = 2 - \frac{1}{4} - \pi = \frac{7}{4} - \pi < 0$, h συν. $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

άρα (Θ.Β) υπάρχει πράγματι $x_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ώστε $h(x_1) = 0$

συνεπώς υπάρχει πράγματι η κοινή εφ/νη των C_f, C_g.