ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠ3 – 2122 ΜΕΧΡΙ ΚΑΙ ΡΥΘΜΟ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι $(x^{a})' = ax^{a-1},\ \textit{για κάθε}\ \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}.$ **(9 μονάδες)**

Α2. Δίνεται ο ισχυρισμός: «Μια συνάρτηση που είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, είναι και συνεχής στο σημείο αυτό». Να χαρακτηρίσετε ως «Αληθή» ή «Ψευδή» τον ισχυρισμό και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(1 + 3 μονάδες)**

Α3. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» τους παρακάτω ισχυρισμούς:

α. Μια συνάρτηση που είναι συνεχής σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού της, είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό.

β. Αν x_o είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε: $(\eta\mu(-x_o))' = -\sigma\upsilon\nu x_o$

γ. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο σημείο x_o, τότε υπάρχει το: $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$

(6 μονάδες)

Α4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \sqrt{4-x^2}$. Να βρείτε ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι λάθος:

α. Η f έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή. **β.** Η f είναι συνεχής στο [-2,2]

γ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο [-2,2] **δ.** Η γραφική παράσταση της f είναι ημικύκλιο.

ε. Η f είναι άρτια συνάρτηση **στ.** Για τη συνάρτηση f μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα Bolzano σε κατάλληλο διάστημα [α, β] , όπου $\alpha,\beta \in [-2,2]\ \mu\varepsilon\ \alpha < \beta.$ **(6 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^4},\ x \in \mathbb{R}.$

Β1. Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση της f . **(9 μονάδες)**

Β2. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της στο σημείο x_o=3. **(6 μονάδες)**

Β3. Να βρείτε – αν υπάρχουν – εφαπτόμενες της συνάρτησης f οι οποίες να διέρχονται από την αρχή των αξόνων. **(10 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Για μια συνάρτηση f , συνεχή και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, ισχύει η σχέση:

$f(\ln x) - \ln x \le x - 1 \le f(x) - e^{x},\ \textit{για κάθε}\ x > 0.$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{x} + x - 1$ και να βρείτε τη μονοτονία και το πρόσημο της f(x).

(8 μονάδες)

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση: $f(2^{x}) + f(4^{x}) = f(3^{x}) + f(5^{x})$ **(8 μονάδες)**

Γ3. Αν Μ είναι ένα σημείο στη γραφική παράσταση της f , του οποίου η τετμημένη αυξάνεται με ταχύτητα 2m/s και Α η προβολή του στον οριζόντιο άξονα , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΜ, τη χρονική στιγμή όπου η τετμημένη του ισούται με ln2. **(9 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους: $f(x) = -\dfrac{2}{x},\ x \in (-\infty,0)\ \ \textit{και}\ \ g(x) = -x^2 - 2x,\ x \in \mathbb{R}.$

Δ1. Να βρείτε – αν υπάρχει – την κοινή εφαπτομένη των συναρτήσεων f και g. **(10 μονάδες)**

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό α, α<0 , ώστε η εφαπτόμενη της C_f στο $(a,f(a))$, να είναι παράλληλη της ευθείας με εξίσωση: $y=(e^a-a)x$ **(8 μονάδες)**

Δ3. Έστω Μ(-2,0) σημείο της καμπύλης C_g και Ν σημείο που κινείται στη γραφική παράσταση της C_f με τρόπο ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό 1 μ/s. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης ΝΜ τη χρονική στιγμή όπου η τετμημένη του σημείου Ν ισούται με (-1). **(7 μονάδες)**

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠ3(2) – 2122 ΜΕΧΡΙ ΚΑΙ ΡΥΘΜΟ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι $(x^{\nu})' = \nu x^{\nu-1}$, *καθώς και ότι* $:(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}^*$.

(5+4 μονάδες)

Α2. Δίνεται ο ισχυρισμός: «Αν για μια συνάρτηση f υπάρχει το: $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_o του πεδίου ορισμού της». Να χαρακτηρίσετε ως «Αληθή» ή «Ψευδή» τον ισχυρισμό και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(1 + 3 μονάδες)**

Α3. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» τους παρακάτω ισχυρισμούς:

α. Μια συνάρτηση που είναι συνεχής σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού της δεν είναι απαραίτητα και παραγωγίσιμη σε αυτό.

β. Αν x_o είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε: $(\sigma\upsilon\nu(-x_o))' = -\eta\mu x_o$

γ. Αν f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_o , ισχύει η σχέση:

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{h \to 1} \frac{f(hx_o) - f(x_o)}{x_o(h-1)} = f'(x_o)$$

(6 μονάδες)

Α4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \dfrac{1}{4 - x^2}$. Να βρείτε ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι λάθος:

α. Η f έχει δύο τιμές στις οποίες είναι ασυνεχής. **β.** Η f είναι συνεχής στο (-2,2)

γ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{-2,2\}$ **δ.** Η γραφική παράσταση της f είναι κύκλος.

ε. Η f είναι άρτια συνάρτηση **στ.** Για τη συνάρτηση f μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα Bolzano σε κατάλληλο διάστημα [α, β] , όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *με* $\alpha < \beta$. **(6 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Β

Ένα σώμα κινείται στον οριζόντιο άξονα και η μετατόπισή του σε m δίνεται από τη σχέση:

$x(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 5,\ t$ *σε sec*, $t \in [0,3]$.

Β1. Να βρείτε τους τύπους που δίνουν την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος. **(4 μονάδες)**

Β2. Να βρείτε σε ποιες χρονικές στιγμές το σώμα μένει ακίνητο. **(4 μονάδες)**

Β3. Να βρείτε τα διαστήματα που το κινητό κάνει επιταχυνόμενη ή επιβραδυνόμενη κίνηση. **(7 μονάδες)**

Β4. Να βρείτε το συνολικό διάστημα που διάνυσε το σώμα καθώς και τη μέση ταχύτητα του σώματος για τα 3 sec της κίνησής του. **(6 + 4 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία γνωρίζουμε ότι η ευθεία με εξίσωση: $y = -x - 5$ είναι η εφαπτομένη της στο σημείο A(1, f(1)).

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f'(1) = -1$ *και* $f(1) = -6$. **(5 μονάδες)**

Γ2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια: *α.* $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(3-x) + x + 4}{x^2 - 2x}$ *b.* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{xf(x) + 6}{x^2 - x}$ **(12 μονάδες)**

Γ3. Να βρείτε την εφαπτομένη της συνάρτησης g με τύπο:

$g(x)=f(x^2-3)+(x-1)^{x-1},\ με\ x\in(1,+\infty)$, $στο\ x_o=2.$ **(8 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=a\ln x+2,\ x\in(1,+\infty),\ a<0$ καθώς και η ευθεία (ε) με εξίσωση: $y=-2x+1$.

Δ1. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_o,\ x_o\in(1,+\infty)$, ώστε η (ε) να εφάπτεται της C_f $στο\ (x_o,f(x_o))$.

(10 μονάδες)

Δ2. Να δείξετε ότι το x_o είναι μοναδικό. **(8 μονάδες)**

Δ3. Με δεδομένο ότι η (ε) είναι η εφαπτόμενη στο $(x_o,f(x_o))$, να δείξετε ότι:

$\ln(-a)=1+\ln 2-\frac{1}{a},\ a<-2$ **(7 μονάδες)**