ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΡΥΘΜΟ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

1. Η εξίσωση της ευθύγραμμης κίνησης ενός σώματος είναι $x(t)= t^3 + 2t$, όπου t ο χρόνος σε sec και x η μετατόπιση σε μέτρα. Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος 2 sec μετά την εκκίνησή του, καθώς και το συνολικό διάστημα που διάνυσε μέσα σε αυτόν τον χρόνο.

2. Το διάστημα S σε μέτρα που διανύει μια πέτρα, όταν εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα 100m/sec, δίνεται από τον τύπο $S(t)=100t-10t^2$, όπου t ο χρόνος σε sec.

i) Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση της πέτρας όταν t=2sec.

ii) Τι συμβαίνει όταν t=6sec.

iii) Να βρείτε το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει η πέτρα.

iv) Σε ποια χρονική στιγμή το ύψος της πέτρας είναι 210 m;

3. Το συνολικό κόστος παραγωγής χ μονάδων ενός προϊόντος είναι $K(x)=500+400x-20x^2+\frac{1}{2}x^3$ και η συνολική είσπραξη από την πώληση τους είναι $E(x)=400x$.

i) Για ποιες τιμές του χ ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι θετικός;

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x \in (20,30)$ για το οποίο μηδενίζεται ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους $K_\mu(x)=\frac{K(x)}{x}$.

4. Η πλευρά ενός ισοπλεύρου τριγώνου αυξάνεται με ρυθμό 4cm/sec.Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού και του ύψους όταν το μήκος της πλευράς γίνει $20\sqrt{3}\,cm$.

5. Έστω Ε το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζουν τα σημεία O(0,0) , A(χ,0) και $B(0,e^x)$,όπου χ>0 .Αν το χ μεταβάλλεται με ρυθμό 3 cm/sec ,να υπολογίσετε:

α. Το ρυθμό μεταβολής του Ε όταν είναι χ=2cm.

β. Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας OAB την ίδια χρονική στιγμή.

6. Φουσκώνουμε μια σφαιρική μπάλα και ο όγκος της αυξάνεται με ρυθμό $500cm^3/sec$.Να βρείτε :

i)Το ρυθμό μεταβολής της ακτίνας της μπάλας ,όταν αυτή είναι 3 cm.

ii) Την ακτίνα της μπάλας την χρονική στιγμή που η επιφάνεια της αυξάνεται με ρυθμό 100 cm^2/sec.

7. Οι διαστάσεις ορθογωνίου παρ/μου αυξάνουν με ρυθμούς 2 m/s και 3 m/s κατά μήκος και πλάτος αντίστοιχα, ενώ τη χρονική στιγμή t=0 το μήκος ήταν 8m και το πλάτος 5m.

α. Να βρείτε σε ποια χρονική στιγμή το σχήμα γίνεται τετράγωνο.

β. Τη χρονική στιγμή κατά την οποία το μήκος γίνεται 12m, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής:

i. Της διαγώνιού του ii. Της περιμέτρου του και iii. του εμβαδού του.

8. Αεροπλάνο ταξιδεύει σε ύψος 3km , παράλληλα προς το οριζόντιο έδαφος, με σταθερή ταχύτητα 500 km/h. Ένας παρατηρητής βρίσκεται στο έδαφος και τη χρονική στιγμή t_o απέχει 4 km από τη προβολή της θέσης του αεροπλάνου στο έδαφος. Το αεροσκάφος απομακρύνεται από τον παρατηρητή.

Να βρείτε εκείνη τη χρονική στιγμή :

α. Το ρυθμό μεταβολής της απόστασης του παρατηρητή από το αεροσκάφος.

β. Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας υπό την οποία «βλέπει» ο παρατηρητής το αεροσκάφος.

ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ - ΤΣΑΒΑΡΗΣ

9. Τελεφερίκ ανεβαίνει συνδέοντας δύο σημεία που απέχουν 5 Km στην ευθεία ενώ έχουν κατακόρυφη απόσταση 1 Km. Η ταχύτητα ανόδου του τελεφερίκ είναι 20 Km/h. Να υπολογίσετε την ταχύτητα με την οποία αυξάνεται το ύψος του τελεφερίκ από την οριζόντια διεύθυνση.

10. Ένας μεταλλικός κυκλικός δίσκος θερμαίνεται και η ακτίνα του δίνεται από τη σχέση: $r(t)=\sqrt{\frac{t^2}{4}+1}\ cm.$ Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της ακτίνας, της περιμέτρου και της επιφάνειας του τη χρονική στιγμή $t=\sqrt{32}\,sec.$

11. Ένα σώμα κινείται στην περιφέρεια κύκλου με κέντρο (2,0) και ακτίνα 3. $((x-2)^2+y^2=9)$ Την χρονική στιγμή κατά την οποία το σώμα διέρχεται από το σημείο $A(1,-\sqrt{8})$, η τετμημένη του μεταβάλλεται με ρυθμό 2μ/s. Να βρείτε, εκείνη τη χρονική στιγμή, το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του καθώς και τη φορά της κίνησής του.

12. Ένα υλικό σημείο κινείται πάνω στην καμπύλη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y=\ln^2(x-1)-x,\ \ x>1.$ Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία η ταχύτητα αύξησης της τετμημένης του, είναι διπλάσια του ρυθμού μείωσης της τεταγμένης του, αν γνωρίζετε ότι οι ταχύτητες μεταβολής των συντεταγμένων παραμένουν διάφορες του μηδενός.

13. Ένα υλικό σημείο κινείται πάνω στο τεταρτοκύκλιο με εξίσωση $y=\sqrt{4-x^2},\ \ x\in[0,2].$ Η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 3 m/s και κάποια χρονική στιγμή το σημείο διέρχεται από το $A(1,\sqrt{3})$. Εκείνη τη χρονική στιγμή να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του καθώς και το ρυθμό μεταβολής της γωνίας ΑΟΒ όπου Β είναι η προβολή του Α στον άξονα χχ΄.

14. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\ln(x-1),\ x>1.$ Ένα σημείο $A(a,f(a)),\ a>1$ κινείται πάνω στην γραφική παράσταση και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 2 μ/s. Ονομάζουμε Μ το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο Α τέμνει τον yy΄. Τη χρονική στιγμή όπου η τεταγμένη του Α ισούται με 1, να υπολογίσετε

α. Την ταχύτητα με την οποία το Μ απομακρύνεται από το Ο.

β. Το ρυθμό μεταβολής της απόστασης ΟΑ.

γ. Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας ΑΟΒ, όπου Β η προβολή του Α στον χχ΄.

15. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x)=x^3+1$. Ένα σημείο $A(a,f(a)),$ κινείται πάνω στην γραφική παράσταση και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 2 μ/s. Ονομάζουμε Μ το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο Α τέμνει τον xx΄. Τη χρονική στιγμή όπου η τεταγμένη του Α ισούται με 2, να υπολογίσετε:

α. Την ταχύτητα με την οποία το Μ απομακρύνεται από το Ο.

β. Το ρυθμό μεταβολής της απόστασης ΟΑ.

γ. Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας ΑΟΒ, όπου Β η προβολή του Α στον χχ΄.

ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ - ΤΖΑΒΑΡΗΣ

16. Δύο ομόκεντροι κυκλικοί δίσκοι έχουν ακτίνες r, R οι οποίες οι οποίες μεγαλώνουν αλλά με τρόπο ώστε να διαφέρουν σταθερά κατά 4cm, ενώ ο ρυθμός μεταβολής της μικρής ακτίνας είναι 2 cm/s. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας του κυκλικού δακτυλίου που σχηματίζεται μεταξύ τους.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x^2+1$.Ένα σημείο κινείται πάνω στην καμπύλη $y=f(x)$ με $x=x(t)$ και $y=y(t)$.Σε ποιο σημείο ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου;

18. Ένα κινητό κινείται στην καμπύλη $y=x^3-x^2+1$. Τη στιγμή που διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(2,5)$ η τετμημένη του ελαττώνεται με ρυθμό 1 μον/sec. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\theta=MOx$ τη χρονική στιγμή που το κινητό διέρχεται από το Μ.

19. Ένα σημείο $\mathrm{M(x,y)}$ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3-2x+3$ και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/s . Σε κάποια χρονική στιγμή , η κλίση της εφαπτομένης της f στο σημείο M είναι 25 .Την στιγμή αυτή:

α) να βρείτε την τετμημένη του σημείου

β) τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M

γ) τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας NOM όπου N η προβολή του M στον $\mathrm{x'x}$ άξονα.

20. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=2x^3-9x^2+12x$

α. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x είναι θετικός.

β. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με $x_o=0$.

ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ - ΤΣΑΒΑΡΗΣ