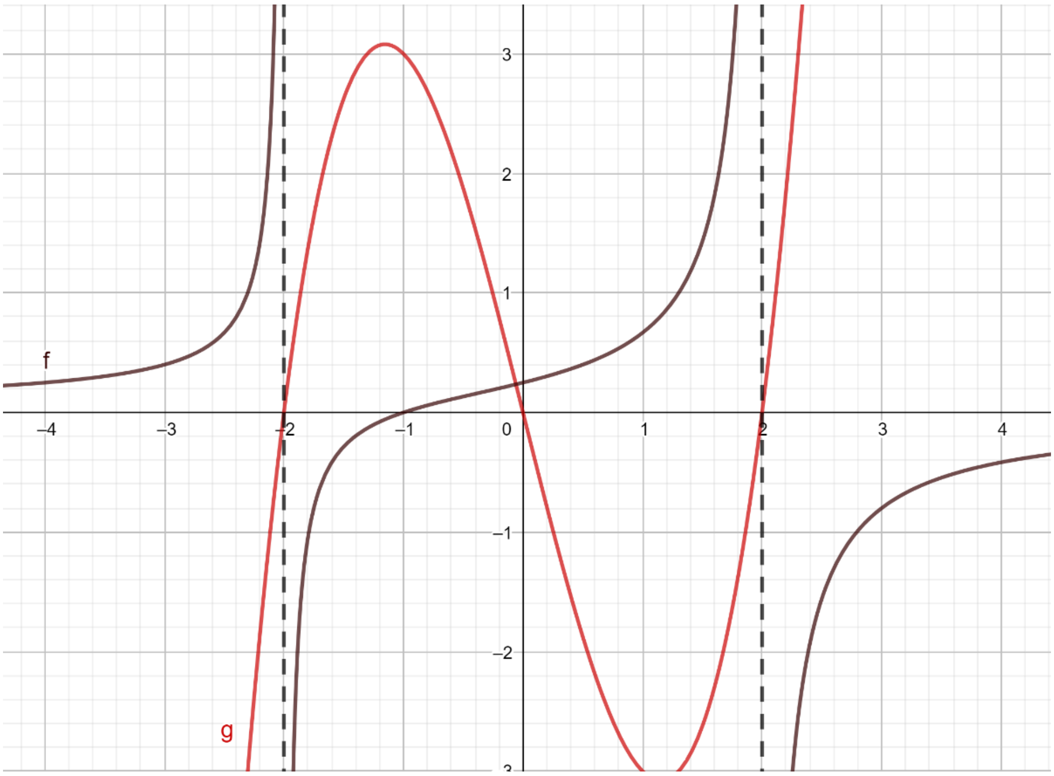
ΓΡΑΠΤΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΣΤΑ ΟΡΙΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Με βάση το σχήμα που ακολουθεί, στο οποίο βλέπετε τις γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g, να υπολογίσετε όσα από τα παρακάτω όρια υπάρχουν ή να δικαιολογήσετε ότι δεν υπάρχουν.



a. $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-g(x))$

b. $\lim\limits_{x\to2^+}\left(\dfrac{g(x)}{f(x)}\right)$

c. $\lim\limits_{x\to0}\left(f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)g(x^2)\right)$

(3+3+5 μονάδες)

Α2. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» τους παρακάτω ισχυρισμούς:

i. Αν $f(x)<g(x)$ και υπάρχουν τα όρια των f,g στο x_o, τότε $\lim\limits_{x\to x_o}f(x)\le\lim\limits_{x\to x_o}g(x)$

ii. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a,\ a\in\mathbb{R}$, τότε και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-a$.

iii. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, τότε υπάρχει $\alpha>0$ ώστε $f(\alpha)<0$.

iv. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3}{e}\right)^x=0$.

v. Αν το $\lim\limits_{x\to x_o}f(x)=a,\ a\in\mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{a}$.

vi. Αν το $\lim\limits_{x\to x_o}|f(x)|=a,\ a>0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_o}f(x)=a$ ή $\lim\limits_{x\to x_o}f(x)=-a$

vii. Αν το $\lim\limits_{x\to x_o}f(x)=a,\ \alpha<0$, τότε η $f(x)$ παίρνει αρνητικές τιμές κοντά στο x_o.

(14 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

B1. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-6x^2+12x-8}$ **B2.** $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3x+1}{x+\eta\mu x}$ **B3.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x^2+5x-2}{x-2}\cdot\eta\mu\dfrac{4}{x}\right)$

B4. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu(x-2)}{x^2-4x+4}$ **B5.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}+\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)$ (40 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται ότι: $\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cdot 2^x-5\cdot a^{x+1}}{3\cdot a^x+2^{x+2}}=-5$ *και* $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-ax+2}+x-1\right)=b$ και η συνάρτηση P(x) με τύπο: $\boldsymbol{P(x)=x^3-x^2-2x}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι α=3. **(8 μονάδες)**

Γ2. Να αποδείξετε ότι $b=\frac{1}{2}$ **(7 μονάδες)**

Γ3. Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to0^+}\left(P(e^{-\frac{1}{x}})+P(\frac{\ln x-1}{\ln x})\right)$ **(10 μονάδες)**

Γ4. Να βρείτε το: $\lim_{x\to0}\frac{P(\sigma\upsilon\nu x-1)}{P(\eta\mu x)}$ **(10 μονάδες)**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α1. α. $0-(-\infty)=+\infty$ b. $\frac{1}{\infty}\cdot 0^+=0$ c. $0\cdot 0=0$

Α2. Σ - Λ - Σ - Σ - Λ - Λ - Σ

Β1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)^3}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-1}{(x-2)^2}=-\infty$

Β2. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{3+\frac{1}{x}}{1+\frac{\eta\mu x}{x}}\overset{\frac{+\infty}{2}}{=}+\infty$

Β3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{3x^2+5x-2}{x^2-2x}\,x\,\eta\mu\frac{4}{x}\right]=3\cdot 4=12$ γιατί:

$\lim\limits_{x\to-\infty}x\,\eta\mu\frac{4}{x}\overset{y=4/x}{=}\lim\limits_{y\to 0}4\cdot\frac{\eta\mu y}{y}=4$

Β4. Για $y=x-2$: $\lim\limits_{y\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu y}{y^2}=\frac{1}{2}$

(πολλ/ζω με $(1+\sigma\upsilon\nu x)$).

Β5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\,\eta\mu\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\eta\mu y}{y}=1$ και $-\frac{1}{|x|}\leq\frac{\eta\mu x}{x}\leq\frac{1}{|x|}$

και αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|}=0$, από κριτ. παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$

συνεπώς το ζητούμενο όριο δίνει αποτέλεσμα 1.

Γ1. Διακρίνουμε περιπτώσεις για α=2, α<2 και α>2. Συγκεκριμένα, για α=2, το όριο δίνει αποτέλεσμα ίσο με -1, άτοπο.

Για α<2, το όριο γράφεται:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x\left[3-5a\left(\frac{a}{2}\right)^x\right]}{2^x\left[3\left(\frac{a}{2}\right)^x+4\right]}=\frac{3}{4}$, άτοπο. Τέλος, για α>2: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x\left[3\left(\frac{2}{a}\right)^x-5a\right]}{a^x\left[3+4\left(\frac{2}{a}\right)^x\right]}=-\frac{5a}{3}$,

άρα $-\frac{5a}{3}=-5\Rightarrow a=3$.

Γ2. Για α=3, κάνουμε συζυγή παράσταση στο ζητούμενο όριο και έχουμε:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x+2-(x-1)^2}{\sqrt{x^2-3x+2}-x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{2}$

Γ3. Όταν $x\to 0^+$, $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{y\to-\infty}e^y=0$ ενώ $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x\left(1-\frac{1}{\ln x}\right)}{\ln x}=1$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}\overset{\frac{1}{-\infty}}{=}0$. Άρα το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[P\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)+P\left(\frac{\ln x-1}{\ln x}\right)\right]=P(0)+P(1)=-2$.

Γ4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\sigma\upsilon\nu x)}{f(\eta\mu x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(1-\sigma\upsilon\nu x)}{1-\sigma\upsilon\nu x}\cdot\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}\cdot\dfrac{\eta\mu x}{f(\eta\mu x)}\cdot\dfrac{x}{\eta\mu x}\right]=-2\cdot 0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1=0$

γιατί: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\sigma\upsilon\nu x)}{1-\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(y)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y(y^2-y-2)}{y}=-2$

και ομοίως: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{f(\eta\mu x)}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{f(y)}=-\dfrac{1}{2}$.