

ΓΡΑΠΤΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ στις ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΥΣ 1.1 -1.3 (ΓΘ2)

ΘΕΜΑ Α

A1. Πώς ορίζεται η σύνθεση της συνάρτησης f με την συνάρτηση g ; Αν η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} , μπορούμε να πούμε ότι η παραπάνω σύνθεση ορίζεται όποιο κι αν είναι το πεδίο ορισμού της f ;

(3+1 μονάδες)

A2. Δίνεται ο ισχυρισμός: «Μια συνάρτηση γνήσια φθίνουσα στο \mathbb{R} , έχει αντίστροφη η οποία είναι επίσης γνήσια φθίνουσα». Να χαρακτηρίσετε ως «Αληθή» η «Ψευδή» τον ισχυρισμό και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(2+4 μονάδες)**

A3. Να γράψετε τον ορισμό της συνάρτησης. **(5 μονάδες)**

A4. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» τους παρακάτω ισχυρισμούς:

α. Μια συνάρτηση 1-1 είναι γνήσια μονότονη.

β. Για μια περιττή συνάρτηση f ισχύει πάντα ότι $f(0)=0$.

γ. Τα κοινά σημεία των f, f^{-1} αν υπάρχουν, βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y=x$.

δ. Αν οι f, g είναι γνήσια φθίνουσες, τότε η $f \circ g$, εφόσον ορίζεται, είναι γνήσια φθίνουσα επίσης.

ε. Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $[0,1]$, τότε και η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = f(1-x)$, έχει πεδίο ορισμού επίσης το $[0,1]$. **(15 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + e^{x-2} - 3, x \in \mathbb{R}$.

B1. Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα και να βρείτε το $f^{-1}(0)$. **(6 μονάδες)**

B2. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 1$. **(4 μονάδες)**

B3. Να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}(\ln 2x) < 2$ **(4 μονάδες)**

B4. Να λυθεί η εξίσωση: $f(1 + f^{-1}(x-2)) = 0$ **(6 μονάδες)**

B5. Να λυθεί η εξίσωση: $|x| - x^2 = e^{x^2-2} - e^{|x|} - 2$ **(10 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Έστω ότι για μια συνάρτηση f ισχύει η σχέση: $f^3(x) + 2f(x) = 3e^{2x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε την τιμή $f(0)$ και να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε x πραγματικό.

(3+2 μονάδες)

Γ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα και να λύσετε την ανίσωση $\ln f(x) < 0$.

(7+3 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση g με τύπο: $g(e^x - 1) = e^x + x - 1, x > -1$.

Δ1. Να βρείτε τον τύπο της $g(x)$ και την μονοτονία της. **(10 μονάδες)**

Δ2. Να λυθεί η ανίσωση: $(3x-1)^2 < \ln\left(\frac{1+6x}{1+9x^2}\right) + 1$ **(15 μονάδες)**

ΓΡΑΠΤΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ στις ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΥΣ 1.1 -1.3 (ΓΘ2)

ΘΕΜΑ Α

A1. Πώς ορίζεται η σύνθεση της συνάρτησης f με την συνάρτηση g ; (4 μονάδες)

A2. Δίνεται ο ισχυρισμός: «Μια συνάρτηση η οποία είναι 1-1, είναι και γνήσια μονότονη». Να χαρακτηρίσετε ως «Αληθή» η «Ψευδή» τον ισχυρισμό και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (2+4 μονάδες)

A3. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» τους παρακάτω ισχυρισμούς:

α. Μια συνάρτηση 1-1 είναι γνήσια μονότονη.

β. Για μια περιττή συνάρτηση f ισχύει πάντα ότι $f(0)=0$.

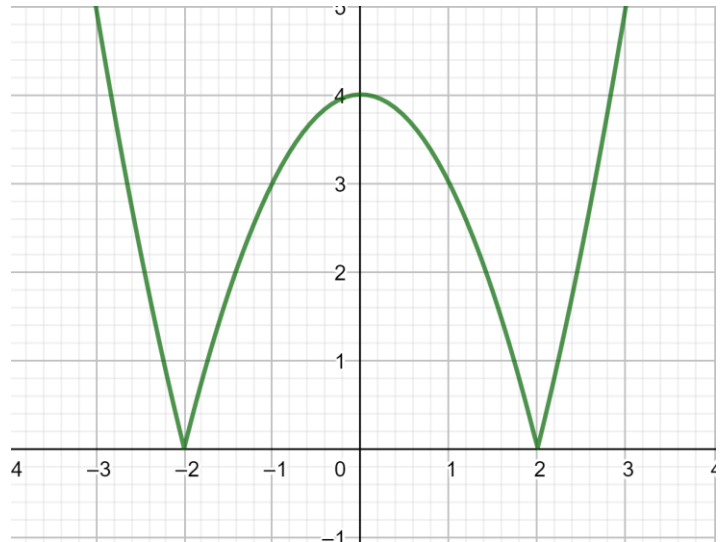
γ. Τα κοινά σημεία των f, f^{-1} αν υπάρχουν, βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y=x$.

δ. Αν οι f, g είναι γνήσια φθίνουσες, τότε η $f \circ g$, εφόσον ορίζεται, είναι γνήσια φθίνουσα επίσης.

ε. Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $[0,1]$, τότε και η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = f(1-x)$, έχει πεδίο ορισμού επίσης το $[0,1]$. (15 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δίνεται στο σχήμα. Με βάση το σχήμα, να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:



B1. Πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $f(x)=a$, όπου a θετικός πραγματικός; Να διακρίνετε περιπτώσεις. (10 μονάδες)

B2. Να δικαιολογήσετε ότι ισχύει η ισότητα:

$$f(f(20)) = f(f(-20)) \quad (5 \text{ μονάδες})$$

B3. Για $x > 2$, να δικαιολογήσετε ότι ορίζεται η αντίστροφη της συνάρτησης f και να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}(x^2 - 1) < 0$ (5 μονάδες)

B4. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης $g(x) = f(f(x))$, $x \in (0,2)$. (5 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε την αντίστροφη της. (10 μονάδες)

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση: $x^3 - \sqrt[3]{x+6} = 6$ (7 μονάδες)

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση: $f(|x| - 15) < -33$ (8 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση g με τύπο: $g(e^{2x} - 1) = \sqrt{e^{2x} - 1} + 2x$, $x > 0$.

Δ1. Να βρείτε τον τύπο της $g(x)$ και την μονοτονία της. (10 μονάδες)

Δ2. Να λυθεί η ανίσωση: $x^2 - |x| < \ln\left(\frac{x^2 + 1}{1 + x^4}\right)$ (15 μονάδες)

