# ΓΡΑΠΤΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ στις ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΥΣ 1.1 -1.3 (ΓΘ2)

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Πώς ορίζεται η σύνθεση της συνάρτησης f με την συνάρτηση g ; Αν η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το R, μπορούμε να πούμε ότι η παραπάνω σύνθεση ορίζεται όποιο κι αν είναι το πεδίο ορισμού της f ;
**(3+1 μονάδες)**

**Α2.** Δίνεται ο ισχυρισμός: «Μια συνάρτηση γνήσια φθίνουσα στο R, έχει αντίστροφη η οποία είναι επίσης γνήσια φθίνουσα». Να χαρακτηρίσετε ως «Αληθή» η «Ψευδή» τον ισχυρισμό και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(2+4 μονάδες)**

**Α3.** Να γράψετε τον ορισμό της συνάρτησης. **(5 μονάδες)**

**Α4.** Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» τους παρακάτω ισχυρισμούς:

α. Μια συνάρτηση 1-1 είναι γνήσια μονότονη.

β. Για μια περιττή συνάρτηση f ισχύει πάντα ότι f(0)=0.

γ. Τα κοινά σημεία των f, $f^{-1}$ αν υπάρχουν, βρίσκονται πάνω στην ευθεία y=x.

δ. Αν οι f,g είναι γνήσια φθίνουσες, τότε η $f\circ g$, εφόσον ορίζεται, είναι γνήσια φθίνουσα επίσης.

ε. Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το [0,1], τότε και η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=f(1-x)$, έχει πεδίο ορισμού επίσης το [0,1]. **(15 μονάδες)**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+e^{x-2}-3,\ \ x\in\mathbb{R}$.

**Β1.** Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα και να βρείτε το $f^{-1}(0)$. **(6 μονάδες)**

**Β2.** Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x)=1$. **(4 μονάδες)**

**Β3.** Να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}(\ln 2x)<2$ **(4 μονάδες)**

**Β4.** Να λυθεί η εξίσωση: $f(1+f^{-1}(x-2))=0$ **(6 μονάδες)**

**Β5.** Να λυθεί η εξίσωση: $|x|-x^2=e^{x^2-2}-e^{|x|}-2$ **(10 μονάδες)**

## ΘΕΜΑ Γ

Έστω ότι για μια συνάρτηση f ισχύει η σχέση: $f^3(x)+2f(x)=3e^{2x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

**Γ1.** Να βρείτε την τιμή f(0) και να δείξετε ότι f(x)>0 για κάθε x πραγματικό.
**(3+2 μονάδες)**

**Γ2.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα και να λύσετε την ανίσωση $\ln f(x)<0$.
**(7+3 μονάδες)**

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση g με τύπο: $g(e^x-1)=e^x+x-1,\ \ x>-1$.

**Δ1.** Να βρείτε τον τύπο της g(x) και την μονοτονία της. **(10 μονάδες)**

**Δ2.** Να λυθεί η ανίσωση: $(3x-1)^2<\ln\left(\dfrac{1+6x}{1+9x^2}\right)+1$ **(15 μονάδες)**

Λύσεις:

Α2: Σωστό, αν $x_1 < x_2$ τότε $f(f^{-1}(x_1)) < f(f^{-1}(x_2)) \xRightarrow{f \searrow} f^{-1}(x_1) > f^{-1}(x_2)$

Α4: Λ-Λ-Λ-Λ-Σ

## ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $x_1 < x_2 \Rightarrow \ldots x_1 + e^{x_1 - 2} - 3 < x_2 + e^{x_2 - 2} - 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα $f \nearrow$

δηλ $f$ 1-1. Αν $f^{-1}(0) = \alpha \Rightarrow 0 = f(\alpha) \Rightarrow f(\alpha) = f(2) \Rightarrow \alpha = 2$

Β2. $f^{-1}(x) = 1 \Rightarrow x = f(1) = \frac{1}{e} - 2$

Β3. $f^{-1}(\ln 2x) < 2 \xRightarrow{f \nearrow} \ln 2x < 0 \Rightarrow 2x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$ και $x > 0$, άρα $x \in (0, 1/2)$

Β4. $f(1 + f^{-1}(x-2)) = 0 \xRightarrow[f^{-1}]{} 1 + f^{-1}(x-2) = f^{-1}(0) = 2 \Rightarrow f^{-1}(x-2) = 1 \Rightarrow$

$x - 2 = \frac{1}{e} - 2 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$

Β5. $|x| - x^2 = e^{x^2-2} - e^{|x|} - 2 \Rightarrow |x| + e^{|x|} = x^2 + e^{x^2-2} - 2 \Rightarrow$

$(|x| + 2) + e^{|x|} - 3 = x^2 + e^{x^2-2} - 3 \Rightarrow f(|x| + 2) = f(x^2) \xRightarrow[1-1]{f} |x| + 2 = x^2$

$\Rightarrow x^2 - |x| - 2 = 0$ , $y = |x|$ οπότε $|x| = -1$ (αδύνατο) ή $|x| = 2 \Rightarrow x = \pm 2$.

## ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $g(x) = x^3 + 2x$, $g \nearrow$. Οπότε, αν $x_1 < x_2 \Rightarrow 3e^{2x_1} < 3e^{2x_2}$

$\Rightarrow f^3(x_1) + 2f(x_1) < f^3(x_2) + 2f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \xRightarrow{g \nearrow}$

$f(x_1) < f(x_2)$ άρα και $f \nearrow$. Επίσης, $f(x)(f^2(x) + 2) = 3e^{2x} \Rightarrow$

$f(x) > 0$ αφού $f^2(x) + 2 > 0$ και $3e^{2x} > 0$.

Η δοσμένη σχέση για $x = 0$ γίνεται: $f^3(0) + 2f(0) - 3 = 0$ οπότε (Horner)

$(f(0) - 1)(f^2(0) + f(0) + 3) = 0 \Rightarrow f(0) = 1$.

Επίσης, $\ln f(x) < 0 \Rightarrow f(x) < 1 \Rightarrow f(x) < f(0) \xRightarrow{f \nearrow} x < 0$

(Οι απαντήσεις στα ερωτήματα Γ1, Γ2 δόθηκαν ανακατεμένες, αλλά δεν τις ξαναγράφω!!)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ξέρω σχέση $g(e^x-1)=e^x+x-1$, θέτω $y=e^x-1 \Rightarrow x=\ln(y+1)$, $y>-1$

άρα $g(y)=y+\ln(y+1)$ δηλ. $g(x)=x+\ln(x+1)$.

Δ2. $9x^2-6x+1<\ln(1+6x)-\ln(1+9x)+1 \Rightarrow 9x^2+\ln(9x^2+1)<6x+\ln(6x+1)$

$\Rightarrow g(9x^2)<g(6x) \underset{g\nearrow}{\Rightarrow} 9x^2<6x \Rightarrow 3x(3x-2)<0 \Rightarrow$

$x\in(0,2/3)$

## ΓΡΑΠΤΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ στις ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΥΣ 1.1 -1.3 (ΓΘ2)

### ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Πώς ορίζεται η σύνθεση της συνάρτησης f με την συνάρτηση g ; **(4 μονάδες)**

**Α2.** Δίνεται ο ισχυρισμός: «Μια συνάρτηση η οποία είναι 1-1, είναι και γνήσια μονότονη». Να χαρακτηρίσετε ως «Αληθή» η «Ψευδή» τον ισχυρισμό και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(2+4 μονάδες)**

**Α3.** Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» τους παρακάτω ισχυρισμούς:

α. Μια συνάρτηση 1-1 είναι γνήσια μονότονη.

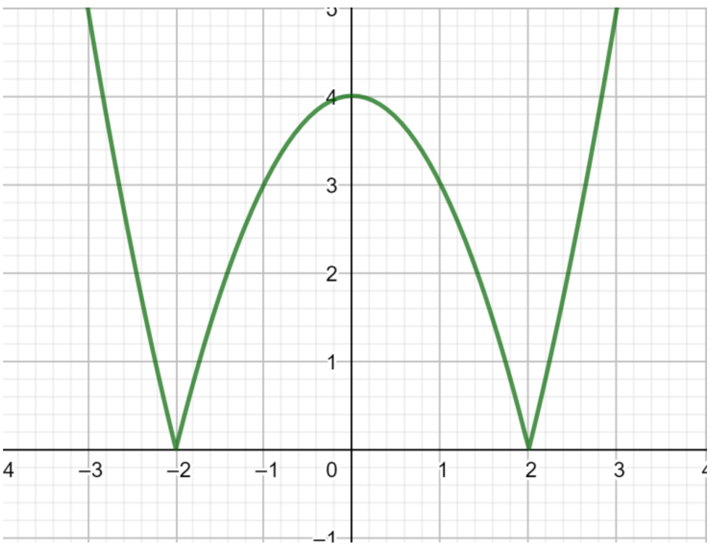
β. Για μια περιττή συνάρτηση f ισχύει πάντα ότι f(0)=0.

γ. Τα κοινά σημεία των f, $f^{-1}$ αν υπάρχουν, βρίσκονται πάνω στην ευθεία y=x.

δ. Αν οι f,g είναι γνήσια φθίνουσες, τότε η $f \circ g$, εφόσον ορίζεται, είναι γνήσια φθίνουσα επίσης.

ε. Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το [0,1], τότε και η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = f(1-x)$, έχει πεδίο ορισμού επίσης το [0,1]. **(15 μονάδες)**

### ΘΕΜΑ Β




Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δίνεται στο σχήμα. Με βάση το σχήμα, να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

**Β1.** Πόσες ρίζες έχει η εξίσωση f(x)=α, όπου α θετικός πραγματικός; Να διακρίνετε περιπτώσεις. **(10 μονάδες)**

**Β2.** Να δικαιολογήσετε ότι ισχύει η ισότητα: $f(f(20)) = f(f(-20))$ **(5 μονάδες)**

**Β3.** Για x>2, να δικαιολογήσετε ότι ορίζεται η αντίστροφη της συνάρτησης f και να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}(x^2-1) < 0$ **(5 μονάδες)**

**Β4.** Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης $g(x) = f(f(x)),\ x \in (0,2)$. **(5 μονάδες)**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6,\ x \in \mathbb{R}$.

**Γ1.** Να βρείτε την αντίστροφή της. **(10 μονάδες)**

**Γ2.** Να λύσετε την εξίσωση: $x^3 - \sqrt[3]{x+6} = 6$ **(7 μονάδες)**

**Γ3.** Να λύσετε την ανίσωση: $f(|x|-15) < -33$ **(8 μονάδες)**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση g με τύπο: $g(e^{2x}-1) = \sqrt{e^{2x}-1} + 2x,\quad x > 0$.

**Δ1.** Να βρείτε τον τύπο της g(x) και την μονοτονία της. **(10 μονάδες)**

**Δ2.** Να λυθεί η ανίσωση: $x^2 - |x| < \ln\left(\dfrac{x^2+1}{1+x^4}\right)$ **(15 μονάδες)**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

B1. Αν $0<a<4$ η $f(x)=a$ έχει 4 λύσεις.

Αν $a=4$ 3 λύσεις, ενώ για $a>4$ είναι αδύνατη.

B2. Η $f$ είναι άρτια, άρα $f(20)=f(-20) \Rightarrow f(f(20))=f(f(-20))$

B3. Για $x\geq 2$, $f\nearrow$ άρα 1-1. Επίσης, πρέπει $x^2-1\geq 0 \Rightarrow x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ συνεπώς για $x\geq 2$, έχουμε $f^{-1}(x^2-1)<0 \Rightarrow x^2-1<f(0) \Rightarrow x^2-1<4$ $\Rightarrow x\in(-\sqrt{5},\sqrt{5})$ άρα τελικά $x\in(2,\sqrt{5})$.

B4. Στο $(0,2)$, η $f$ είναι γν. φθίνουσα, συνεπώς για $x_1<x_2 \Rightarrow$ $f(x_1)>f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1))<f(f(x_2)) \Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$ άρα $g\nearrow$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η $f(x)=x^3-6$ είναι γν. αύξουσα άρα 1-1. Θέτω $y=x^3-6 \Rightarrow x^3=y+6$ άρα $x=\sqrt[3]{y+6}$ για $y\geq -6$ ή $x=-\sqrt[3]{-y-6}$ για $y<-6$ συνεπώς

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} -\sqrt[3]{-x-6}, & x<-6 \\ \sqrt[3]{x+6}, & x\geq -6 \end{cases}$$

Γ2. $x^3-\sqrt[3]{x+6}=6 \Rightarrow x^3-6=\sqrt[3]{x+6} \Rightarrow f(x)=f^{-1}(x) \xRightarrow{f\nearrow} f(x)=x \Rightarrow$ $x^3-6=x \Rightarrow x^3-x-6=0 \Rightarrow$ (Horner) $x=2$.

Γ3. $f(|x|-15)<-33 \Rightarrow f(|x|-15)<f(-3) \xRightarrow{f\nearrow} |x|-15<-3 \Rightarrow$ $|x|<12 \Rightarrow -12<x<12$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 Στη σχέση $g(e^{2x}-1)=\sqrt{e^{2x}-1}+2x$, θέτω $y=e^{2x}-1 \Rightarrow e^{2x}=y+1$ δηλαδή $2x=\ln(y+1)$ άρα $g(y)=\sqrt{y}+\ln(y+1)$, $g\nearrow$

Δ2. $x^2-|x|<\ln\left(\frac{1+x^2}{1+x^4}\right) \Rightarrow x^2+\ln(1+x^4)<|x|+\ln(1+x^2) \Rightarrow$ $g(x^4)<g(x^2) \Rightarrow x^4<x^2 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2(x^2-1)<0 \\ \text{και } x>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x\in(0,1)$.