ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΕΠ3 – 2122 (Θεωρήματα συνέχειας)

Α3. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής. Για παράδειγμα , η συνάρτηση με τύπο: $f(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ e^{x}, & x>0 \end{cases}$ πληροί τις υποθέσεις, αλλά δεν διατηρεί το ίδιο πρόσημο για αρνητικές και θετικές του χ.

Α4. Σωστό - Λάθος - Λάθος - Λάθος - Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για $x\neq 1$, $(x-1)f(x)=\eta\mu(x-1)+(x-1)(x-3) \Rightarrow f(x)=\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}+x-3$.

Αφού f συνεχής στο 1, $f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\left[\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}+x-3\right]=1+1-3=-1$

συνεπώς $f(x)=\begin{cases} \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}+x-3, & x\neq 1 \\ -1, & x=1 \end{cases}$.

Β2. Η f είναι συνεχής στο $[2,3]$ με $f(2)=\eta\mu 1-1<0$ και

$f(3)=\frac{\eta\mu 2}{2}>0$ (αφού $\frac{\pi}{2}<2<\pi$, $\eta\mu 2>0$), οπότε με Θ. Bolzano

υπάρχει $x_0\in(2,3)$ ώστε $f(x_0)=0$.

Β3. i) Είναι $-\frac{1}{x(x-1)}\leq\frac{\eta\mu(x-1)}{x(x-1)}\leq\frac{1}{x(x-1)}$ για $x\to+\infty$, και

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x(x-1)}=0$, συνεπώς με κ.π. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu(x-1)}{x(x-1)}=0$, άρα:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\eta\mu(x-1)}{x(x-1)}+1-\frac{3}{x}\right]=0+1-0=1.$$

ii) $$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-x+3}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu(x-1)}{(x-1)^3}=\lim_{x\to 1}\left[\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}\right]=1\cdot(+\infty)=+\infty$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $f^2(x)-2\eta\mu x\, f(x)+\eta\mu^2 x=x^2+\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x \Rightarrow$

$(f(x)-\eta\mu x)^2=1+x^2 \Rightarrow |f(x)-\eta\mu x|=\sqrt{1+x^2}$. Θέτω $g(x)=f(x)-\eta\mu x$

και είναι $g(x)$ συνεχής, $g(x)\neq 0$, άρα διατηρεί πρόσημο, $g(0)=-1$, δηλαδή

$g(x)<0 \Rightarrow -f(x)+\eta\mu x=\sqrt{1+x^2} \Rightarrow f(x)=\eta\mu x-\sqrt{1+x^2}$.

Γ2. $\eta\mu x-\sqrt{1+x^2}<0 \Rightarrow \eta\mu x<\sqrt{1+x^2}$. Αν $\eta\mu x\leq 0$, ισχύει.

Αν $\eta\mu x>0$, υψώνω στο τετράγωνο: $\eta\mu^2 x<1+x^2 \Rightarrow -\sigma\upsilon\nu^2 x<x^2$

το οποίο ισχύει (αν $x=0$, $-1<0$) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ3. i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\eta\mu x-\sqrt{x^2+1}\right]$. Αφού $-1\le \eta\mu x\le 1$ είναι:

$-1-\sqrt{1+x^2}\le f(x)\le 1-\sqrt{1+x^2}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\pm 1-\sqrt{1+x^2}\right]=-\infty$,

άρα (Κ.Π.) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

ii. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$ (Κ.Π) και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=1$

είναι $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Λύνω το σύστημα τους: $x^2=\alpha x-1\Rightarrow x^2-\alpha x+1=0$. Η $\Delta=\alpha^2-4<0$ γιατί $0<\alpha<2$, συνεπώς η παραβολή και η ευθεία δεν έχουν κανένα κοινό σημείο

Δ2. Η ευθεία είναι η $\alpha x-y-1=0$ και το σημείο $M(x,x^2)$, άρα:

$d(x)=\frac{|\alpha x-x^2-1|}{\sqrt{1+\alpha^2}}=\frac{x^2-\alpha x+1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$, (αφού $\Delta<0$, $-x^2+\alpha x-1<0$).

Δ3. Η συνάρτηση $d(x)$ είναι συνεχής στο $[-\alpha,\alpha]$, άρα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε αυτό, δηλ. υπάρχουν $x_1,x_2\in[-\alpha,\alpha]$ ώστε:

$$d(x_1)\le d(x)\le d(x_2).$$