

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών. **(Μονάδες 8)**
- A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής. **(Μονάδες 3)**
- A3.** Δίνεται ο ισχυρισμός: «Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα σύνολο  $A$  και δεν μηδενίζεται, τότε διατηρεί πρόσημο σε αυτό». Να τον χαρακτηρίσετε ως «Αληθή» ή «Ψευδή» και να δικαιολογήσετε τον χαρακτηρισμό. **(1+3 μονάδες)**
- A4.** Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» τις παρακάτω προτάσεις:
- α. Η εικόνα ενός διαστήματος μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι διάστημα.
- β. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής και γνήσια μονότονη σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε αυτό.
- γ. Αν μια συνάρτηση  $f$ , συνεχής στο  $[a, \beta]$ , έχει ρίζα στο διάστημα  $(a, \beta)$ , τότε  $f(a)f(\beta) < 0$ .
- δ. Για μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ασυνεχής σε σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, το όριο της στο  $x_0$  είναι συν άπειρο ή πλην άπειρο ή δεν υπάρχει.
- ε. Αν οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι συνεχείς στο ίδιο διάστημα  $\Delta$ , τότε και η σύνθεσή της  $f$  με την  $g$  είναι επίσης συνεχής στο  $\Delta$ . **(10 μονάδες)**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνεχής στο  $\mathbb{R}$  συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει η σχέση:

$$(x-1)f(x) = \eta\mu(x-1) + x^2 - 4x + 3, x \in \mathbb{R} - \{1\}.$$

**B1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} + x - 3, & x \neq 1 \\ -1, & x = 1 \end{cases}$  **(9 μονάδες)**

**B2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(2, 3)$ . **(8 μονάδες)**

**B3.** Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια: *i.*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  *ii.*  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x + 3}{(x-1)^2}$  **(4+4 μονάδες)**

**ΘΕΜΑ Γ**

Αν για την συνεχή στο  $\mathbb{R}$  συνάρτηση  $f$  γνωρίζουμε ότι:

$$f^2(x) - 2\eta\mu x \cdot f(x) = x^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = -1, \text{ τότε:}$$

**Γ1.** Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης  $f$ . **(10 μονάδες)**

$$\text{Έστω } f(x) = \eta\mu x - \sqrt{x^2 + 1}$$

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) < 0$  για κάθε  $x$  πραγματικό αριθμό. **(7 μονάδες)**

**Γ3.** Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

*i.*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  *ii.*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  **(8 μονάδες)**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η παραβολή  $f(x) = x^2$  και η ευθεία  $y = ax - 1$ ,  $a \in (0, 2)$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. **(8 μονάδες)**

**Δ2.** Έστω σημείο  $M(x, f(x))$ , με  $x \in [-a, a]$  το οποίο κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ . Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης  $d(x)$  που δίνει την απόσταση του σημείου  $M$  από την

ευθεία. (7 μονάδες)

**Δ3.** Να δικαιολογήσετε ότι υπάρχουν σημεία  $x_1, x_2 \in [-a, a]$  ώστε η απόσταση  $d(x_1)$  να γίνεται μεγαλύτερη από κάθε άλλη και η απόσταση  $d(x_2)$  να είναι μικρότερη από κάθε άλλη απόσταση  $d(x)$ .  
(8 μονάδες)

