

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΕΠ1-2021

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων μεταξύ τους συναρτήσεων, έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία $y=x$.

(8 μονάδες)

A2. Δίνεται ο ισχυρισμός: «Μια συνάρτηση γνήσια φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, έχει αντίστροφη η οποία είναι επίσης γνήσια φθίνουσα». Να χαρακτηρίσετε ως «Αληθή» η «Ψευδή» τον ισχυρισμό και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(1+3 μονάδες)**

A3. Να γράψετε τον ορισμό της συνάρτησης. **(3 μονάδες)**

A4. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» τους παρακάτω ισχυρισμούς:

α. Μια συνάρτηση 1-1 είναι γνήσια μονότονη.

β. Για μια περιττή συνάρτηση f ισχύει πάντα ότι $f(0)=0$.

γ. Τα κοινά σημεία των f , f^{-1} αν υπάρχουν, βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y=x$.

δ. Αν οι f, g είναι γνήσια φθίνουσες, τότε η $f \circ g$, εφόσον ορίζεται, είναι γνήσια φθίνουσα επίσης.

ε. Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $[0,1]$, τότε και η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = f(1-x)$, έχει πεδίο ορισμού επίσης το $[0,1]$. **(10 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Β

Έστω ότι για μια συνάρτηση f ισχύει η σχέση:

$$f(2-x) + xf(x) = x + 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

B1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$. **(9 μονάδες)**

B2. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 1$. Το 1 είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(2+4 μονάδες)**

B3. Αν $x \in (1, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της. **(4+6 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Έστω ότι για μια συνάρτηση f ισχύει η σχέση:

$$f^3(x) + 2f(x) = 3e^{2x}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να βρείτε την τιμή $f(0)$ και να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε x πραγματικό. **(3+4 μονάδες)**

Γ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα. **(7 μονάδες)**

Γ3. Να δικαιολογήσετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την f^{-1} . **(5 μονάδες)**

Γ4. Να λύσετε την ανίσωση $\ln f(x) < 0$. **(6 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Έστω ότι για μια συνάρτηση f ισχύει:

$$f(x+y)+3f(x-y)=4f(x)-y, \text{ για κάθε } x,y \in \mathbb{R} \text{ και } f(2)=2.$$

Δ1. i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{x}{2} + f(0)$ και ii. Να αποδείξετε ότι $f(0)=1$

(6+3 μονάδες)

Δ2. Αν $g(x) = 2ax - 3$, να βρείτε την τιμή του a ώστε $f \circ g = g \circ f$. **(6 μονάδες)**

Δ3. Να λυθεί στο διάστημα $(0, +\infty)$, η εξίσωση $f(e^x - x) = f(-\ln x + e - x)$.

(10 μονάδες)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

A2. Αληθής.

Αν $x_1 < x_2$, τότε $f(f^{-1}(x_1)) < f(f^{-1}(x_2)) \xrightarrow{f \text{ γν. φθιν.}} f^{-1}(x_1) > f^{-1}(x_2)$

A4: Λ-Λ-Λ-Λ-Σ

B1. Θέτουμε όπου x το $(2-x)$ στην αρχική και λύνουμε το σύστημα που προκύπτει .

B2. $f(x) = 1 + \frac{1}{(x-1)^2}$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{1\}$. Το 1 δεν είναι η ελάχιστη

τιμή της f αφού δεν υπάρχει x ώστε $f(x)=1$.

B3. Δείχνουμε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα για $x > 1$ και στη συνέχεια:

$$y - 1 = \frac{1}{(x-1)^2}, \quad (x-1)^2 = \frac{1}{y-1} \Rightarrow |x-1| = \frac{1}{\sqrt{y-1}} \text{ και αφού } x > 1, \quad x = \frac{1}{\sqrt{y-1}} + 1$$

$$\text{άρα } f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + 1, \quad x \in (1, +\infty).$$

Γ1. Για $x=0$ στη σχέση και με σχήμα Horner παίρνουμε $f(0)=1$. Επίσης, η δοσμένη σχέση γράφεται και $f(x) \cdot (f^2(x) + 2) = 2e^{2x}$, οπότε $f(x) > 0$.

Γ2.

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 3e^{2x_1} < 3e^{2x_2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (f(x_1) - f(x_2)) \cdot [f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2) + 2] < 0 \\ \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$$\Gamma 3. f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^3 + 2x}{3} \right), \quad x > 0.$$

$$\Gamma 4. \ln f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < 1 \Leftrightarrow f(x) < f(0) \xrightarrow{f \nearrow} x < 0$$

Δ1. Στη δοσμένη σχέση θέτουμε πρώτα $y=x$ και μετά όπου y το $-x$ και λύνουμε το

σύστημα. Αξιοποιούμε στη συνέχεια το $f(2)=2$ βρίσκουμε τελικά $f(x) = \frac{x}{2} + 1$

Δ2. $a=5/4$

Δ3. Επειδή f είναι 1-1, λύνουμε την εξίσωση θέτοντας

$g(x) = e^x + \ln x - e$. Προφανής ρίζα η $x=1$, μοναδική γιατί f είναι γνήσια αύξουσα.