ΛΥΣΕΙΣ ΕΠ2- 2122, ΑΠΟ Γ2 ΚΑΙ ΜΕΤΑ

Γ2. $\lim_{x\to-\infty}\left[kx+2-\sqrt{4x^2+\lambda x-1}\right]=\lim_{x\to-\infty} x\left[k+\frac{2}{x}+\sqrt{4+\frac{\lambda}{x}-\frac{1}{x^2}}\right]=(-\infty)(k+2)=+\infty$ ή $-\infty$ για $k\neq-2$.

Συνεπώς για $k=-2$: $\lim_{x\to-\infty}-\left[2x-2+\sqrt{4x^2+\lambda x-1}\right]=\lim_{x\to-\infty}-\frac{(\lambda-8)x+3}{x\left(2-\frac{2}{x}+\sqrt{4+\frac{\lambda}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)}=$

$\frac{8-\lambda}{4}=5\Rightarrow 8-\lambda=20\Rightarrow \boxed{\lambda=-12}$.

Γ3.i)Διακρίνουμε περιπτώσεις: Για m<e έχουμε: $\lim_{x\to-\infty}\frac{3e^x-m^x}{e^x+m^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{m^x\left[3\left(\frac{e}{m}\right)^x-1\right]}{m^x\left[\left(\frac{e}{m}\right)^x+1\right]}=-1$

Για m>e έχουμε: $\lim_{x\to-\infty}\frac{3e^x-m^x}{e^x+m^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x\left[3-\left(\frac{m}{e}\right)^x\right]}{e^x\left[1+\left(\frac{m}{e}\right)^x\right]}=2$, επίσης μη δεκτή.

Συνεπώς, πρέπει m=e και πράγματι το όριο γίνεται : $\lim_{x\to-\infty}\frac{3e^x-e^x}{e^x+e^x}=\frac{2}{2}=1$.

$f(x)=\ln(e^x+1)-x=\ln(e^x+1)-\ln e^x=\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)=\ln(1+e^{-x})$, $x\in\mathbb{R}$.

Με $x_1<x_2\Rightarrow e^{-x_1}>e^{-x_2}\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ άρα $f\downarrow$.

ii) Θέτω $y=\ln(1+e^{-x})\Rightarrow e^{-x}=e^y-1$ (ζητώ $e^y-1>0$, $y>0$ άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $(0,+\infty)$).

$\Rightarrow -x=\ln(e^y-1)\Rightarrow x=-\ln(e^y-1)$

άρα $f^{-1}(x)=-\ln(e^x-1)=\ln\left(\frac{1}{e^x-1}\right)$, $x\in(0,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. a) Θέτω $g(x)=\frac{f(x)-\sqrt{x+3}}{x-1}\Rightarrow \lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\left[g(x)(x-1)+\sqrt{x+3}\right]\Rightarrow \lim_{x\to1}f(x)=2$.

b) Θέτω $y=x-1$ και το όριο γίνεται: $\lim_{y\to1}\frac{f(y)-2}{y-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)(x-1)+\sqrt{x+3}-2}{x-1}=$

$\lim_{x\to1}\left[g(x)+\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}\right]=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

c) $\lim_{x\to1}\frac{ημ(f(x)-2)}{x-1}=\lim_{x\to1}\left[\frac{ημ(f(x)-2)}{f(x)-2}\cdot\frac{f(x)-2}{x-1}\right]$ (1). Το δεύτερο κλάσμα δίνει $\frac{1}{2}$.

και $\lim_{x\to1}\frac{ημ(f(x)-2)}{f(x)-2}\underset{y=f(x)-2}{=}\lim_{y\to0}\frac{ημy}{y}=1$ άρα η (1) δίνει αποτέλεσμα $\frac{1}{2}$.

Δ2. a) Θέτω $g(x)=\frac{1}{f(x)}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{g(x)}\overset{\frac{1}{0^+}}{=}+\infty$

b) Θέτω $y=f(x)$, οπότε για $x\to+\infty$, $y\to+\infty$ άρα το ζητούμενο όριο γράφεται:

$\lim_{y\to+\infty}\frac{|2-y^2|-|y-1|}{|y^2+3y-2|}=\lim_{y\to+\infty}\frac{-2+y^2-y+1}{y^2+3y-2}=1$

Δ3. Προσθαφαιρώ το 2 στον αριθμητή και "σπάω" το ζητούμενο όριο:

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(1+h)-2}{h}-\frac{f(1-h)-2}{h}\right].$$ Θέτω $y=1+h$ και $$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-2}{h}=\lim_{y\to 1}\frac{f(y)-2}{y-1}=\frac{1}{2}$$

και, ομοίως, για $y=1-h$, $$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-2}{h}=\lim_{y\to 1}\frac{f(y)-2}{-(y-1)}=-\frac{1}{2}$$

συνεπώς το ζητούμενο όριο είναι μηδέν.