ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠ2 – 2122

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η y=x είναι άξονας συμμετρίας για μια 1-1 συνάρτηση f και την αντίστροφή της. Θεωρείστε ότι η f είναι ορισμένη στο R και ότι f(R)=R. **(8 μονάδες)**

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής. **(3 μονάδες)**

Α3. Δίνεται ο ισχυρισμός: «Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι f(x)>0 για χ κοντά στο x_o , όπου $x_o \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) και υπάρχει το όριο της όταν το χ τείνει στο x_o , τότε το όριο της είναι θετικός αριθμός». Να τον χαρακτηρίσετε ως Αληθή ή Ψευδή και να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.
(1+3 μονάδες)

Α4. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» τις παρακάτω προτάσεις:

α. Για δύο συναρτήσεις με το ίδιο πεδίο ορισμού Α, η σύνθεση τους έχει επίσης πεδίο ορισμού το Α.

β. Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων f, g είναι πάντα τόσα όσα και οι λύσεις της εξίσωσης f(x)=g(x).

γ. Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{|x|}} = 0$

δ. Αν υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης f κοντά στο x_o, τότε ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$

ε. Αν το $\lim\limits_{x\to0} |f(x)| = 0$, τότε το $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ ή $-\infty$. **(10 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Να υπολογίσετε τα όρια:

a. $\lim\limits_{x\to2} \frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{3-\sqrt{x+7}}$ b. $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-x-2}{x^3+3x^2+3x+1}$ c. $\lim\limits_{x\to3} \left[(x-3)^2 \eta\mu \frac{1}{x^2-9}\right]$ **(12 μονάδες)**

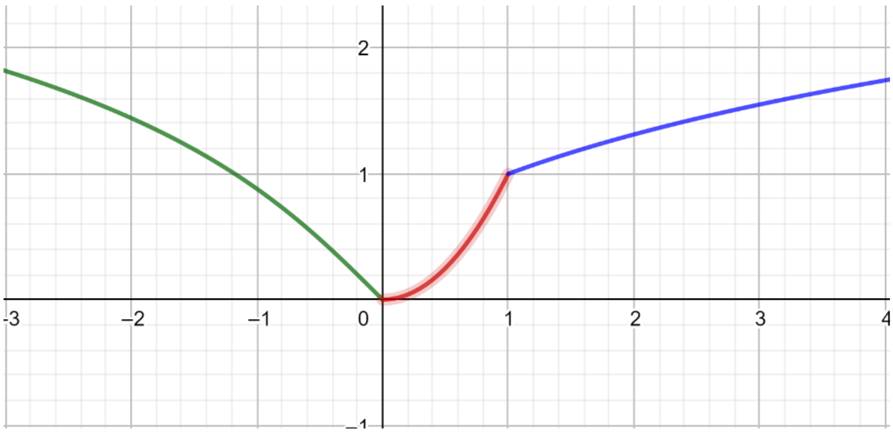
Β2. Με βάση την παρακάτω γραφική παράσταση, να υπολογίσετε – αν υπάρχουν - τα ζητούμενα όρια:

a. $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{f(x)}$ b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)}$

c. $\lim\limits_{x\to1} \frac{1}{f(x)-1}$

d. $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(a)x^3 - 2x^2 + 1)$, $a \in \mathbb{R}^*$

(3+3+4+3 μονάδες)



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β ώστε να ισχύει: $\lim\limits_{x\to2} \frac{x^3-(a+1)x^2+\beta x+6}{x-2} = 5$ **(6 μονάδες)**

Γ2. Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ ώστε να ισχύει: $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\kappa x + 2 - \sqrt{4x^2+\lambda x-1}\right) = 5$ **(6 μονάδες)**

Γ3. i. Αν γνωρίζετε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3e^x - m^x}{e^x + m^x} = 1$, τότε να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης με τύπο :

$f(x)=\ln(m^x+1)-x,\ x\in\mathbb{R}$. **(3+4 μονάδες)**

ii. Για m=e, να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της $f(x)$. **(6 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Για μια συνάρτηση f ορισμένη στο R, γνωρίζουμε ότι:

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\sqrt{x+3}}{x-1}=\dfrac{1}{4}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0$ με $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

Δ1. a. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ b. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x-1)-2}{x-2}$ c. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu(f(x)-2)}{x-1}$ **(2+3+4 μονάδες)**

Δ2. a. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|2-f^2(x)|-|f(x)-1|}{|f^2(x)+3f(x)-2|}$ **(3+4 μονάδες)**

Δ3. Να βρείτε το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$ **(9 μονάδες)**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α3: Είναι ψευδής ο ισχυρισμός. Αν , για παράδειγμα, f(x)=1/x με x>0, είναι f(x)>0 αλλά το όριο της όταν το x τείνει στο συν άπειρο είναι μηδέν.

Α4: Λ-Σ-Λ-Λ-Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x+6}-2}{3-\sqrt{x+7}}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+6-8)(3+\sqrt{x+7})}{(9-x-7)(\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\cdot\sqrt[3]{x+6}+4)}=-\dfrac{6}{12}=-\dfrac{1}{2}$

β) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+3x^2+3x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x+1)^3}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-2}{(x+1)^2}=-\infty$

γ) Είναι $\left|(x-3)^2\,\eta\mu\dfrac{1}{x^2-9}\right|\le(x-3)^2 \Leftrightarrow -(x-3)^2\le(x-3)^2\,\eta\mu\dfrac{1}{x^2-9}\le(x-3)^2$

και με Κ.Π. το όριο είναι μηδέν.

Β2. α) $+\infty$, αφού $f(x)>0$ όταν $x\to 0$ και $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

β) 0, γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ γ) Δεν υπάρχει, γιατί $f(x)-1<0$ όταν $x\to 1^-$ ενώ $f(x)-1>0$ όταν $x\to 1^+$

δ) $-\infty$, γιατί $f(\alpha)>0\ \forall\ \alpha\neq 0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θέτω $g(x)=\dfrac{x^3-(\alpha+1)x^2+\beta x+6}{x-2}$ άρα: $\lim\limits_{x\to 2}g(x)(x-2)=\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3-(\alpha+1)x^2+\beta x+6\right)\Rightarrow$

$0=14-4\alpha-4+2\beta \Rightarrow \beta=2\alpha-5$.

Για $\beta=2\alpha-5$, κάνω Horner στον αριθμητή: $x^3-(\alpha+1)x^2+(2\alpha-5)x+6$.

1	$-\alpha-1$	$2\alpha-5$	6	$x=2$
	2	$-2\alpha+2$	-6	
1	$-\alpha+1$	-3	0	

άρα: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+(-\alpha+1)x-3)}{x-2}=5\Rightarrow 4-2\alpha+2-3=5$

$\Rightarrow \alpha=-1$

συνεπώς $\beta=-7$