ΘΕΜΑΤΑΚΙΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Δίνονται τα σημεία $A(2,2\sqrt{3})$, $B(4,0)$ και $\Gamma(\kappa+4,-\kappa\sqrt{3})$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

Α. Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά για κάθε τιμή του κ.

Β. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AO}$.

Γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του κ ισχύει η σχέση: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=2\cdot\overrightarrow{B\Gamma}^2$

Δ. Για κάθε μία από τις τιμές του κ του προηγούμενου ερωτήματος, να βρείτε τη σχετική θέση των σημείων Α, Β, Γ.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η εξίσωση: $(*)\ \left(\lambda^2+\lambda+1\right)x+\left(\lambda^2-5\right)y-2\lambda=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$

Α. Να δείξετε ότι παριστάνει ευθεία για κάθε λ πραγματικό.

Β. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει σταθερό σημείο από το οποίο να διέρχονται όλες οι ευθείες της οικογένειας.

Γ. Να βρείτε – αν υπάρχει – ευθεία της οικογένειας παράλληλη στην (ε) :

31χ+31ψ-19=0

Δ. Για λ=-6, βρείτε την απόσταση των ευθειών (ε) και (*).

Ε. Για λ=1, βρείτε το πλησιέστερο σημείο της (*) στο σημείο Ο(0,0).

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η εξίσωση: $(*)\ x^2+y^2+\left(2\lambda+6\right)x+\left(2\lambda-6\right)y+2\lambda^2=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$

Α. Να αποδείξετε ότι παριστάνει ίσους κύκλους για κάθε λ πραγματικό, των οποίων να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Β. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων , είναι η ευθεία με εξίσωση: y=x+6 (ε).

Γ. Όλοι οι κύκλοι της οικογένειας (*) έχουν δύο κοινές εφαπτόμενες. Να βρείτε τις εξισώσεις τους.

Δ. 1. Να βρείτε την εξίσωση μιας παραβολής με εστία στον ψψ΄ , η οποία να έχει εφαπτομένη την ευθεία (ε).

2. Να βρείτε μια εφαπτομένη της προηγούμενης παραβολής, κάθετη στην (ε).

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται το σημείο $A(1,2)$ και το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}=\left(-2,1\right)$, όπου Μ μέσο ενός τμήματος ΑΒ.

Α. Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το (-1,3) ενώ το Β είναι το (-3,4)

Β. Αν $\vec{\alpha}=\overrightarrow{OA}+2\cdot\overrightarrow{BM}$ και $\vec{\beta}\neq\vec{0},\ \vec{\beta}=\left(\lambda^2,\lambda-3\right)$ να βρείτε τη τιμή του λ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, να είναι συγγραμμικά.

Γ. Αν $\vec{\gamma}=\left(2\kappa-4,\kappa^2-1\right)$, $\kappa\in\mathbb{R}$, βρείτε το κ ώστε $\vec{\alpha}\perp\vec{\gamma}$.

ΘΕΜΑ 5ο

Δίνεται η εξίσωση: $(*)\ x^2-y^2+4x+6y-5=0$

Α. Να αποδείξετε ότι η (*) παριστάνει δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους.

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

Β. Πάνω στις ευθείες με εξισώσεις $(\varepsilon_1): y=-x+1$ $(\varepsilon_2): y=x+5$, παίρνουμε τα σημεία Α και Β αντίστοιχα, ώστε το σημείο Μ(-1,0) να είναι το μέσο του ΑΒ. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

Γ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Ν(x,y), για τα οποία ισχύει ότι η γωνία ΑΝΒ είναι ορθή.

Δ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Λ(x,y) , για τα οποία το εμβαδόν του τριγώνου ΑΛΒ ισούται με $3\sqrt{10}$ τ.μ.α

ΘΕΜΑ 6ο

Δίνονται οι κύκλοι με εξισώσεις: $C_1: x^2+y^2+10x+9=0$ $C_2: x^2+y^2-10x-11=0$

Α. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι είναι εξωτερικά εφαπτόμενοι.

Β. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων στους δύο κύκλους που άγονται από το σημείο Α(-1,8).

Γ. Η μία από τις τρεις εφαπτόμενες του ερωτήματος β είναι διευθετούσα μιας παραβολής με εστία στον χχ΄ και άξονα συμμετρίας τον χχ΄. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής.

Δ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά στους κύκλους C_1 και C_2.

ΘΕΜΑ 7ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x-1,y+2)$, $\vec{\beta}=(x+1,y-2)$.

Α. Αν ισχύει ότι: $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ(x,y).

Β. Για χ=3 και y=-1, να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{\alpha}+2\cdot\vec{\beta}$ στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

Γ. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου του ερωτήματος (Α) , στο σημείο του Α(1,-2).

Δ. Βρείτε την παραβολή με εφαπτομένη την ευθεία του ερωτήματος (Γ) και εστία στον άξονα ψψ΄.

ΘΕΜΑ 8ο

Έστω $\vec{\alpha}=\left(|\vec{\alpha}|-2,-\frac{|\vec{\alpha}|\cdot\sqrt{3}}{2}\right)$. Α. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$

Β. Για την πιο μεγάλη από τις τιμές του μέτρου που βρήκατε, να υπολογίσετε τη γωνία του διανύσματος $\vec{\alpha}$ με τον άξονα χχ΄.

Γ. Αν ισχύει ότι: $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, όπου $\vec{\beta}=\left(x^2,x\sqrt{3}\right)$, $\vec{\beta}\neq\vec{0}$, βρείτε το χ.

ΘΕΜΑ 9ο

Δίνεται η εξίσωση: $(*): (a^2-4)x+(a^2+a)y+a^2+2a+4=0,\ a\in\mathbb{R}$.

Α. Να δείξετε ότι είναι ευθεία για κάθε α πραγματικό αριθμό.

Β. Να δείξετε ότι περνά από σταθερό σημείο, το οποίο και να βρείτε.

Γ. Για α=1 , να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία με τους άξονες.

ΘΕΜΑ 10ο

Δίνεται η γραμμή με εξίσωση: $x^2+y^2-6x+a=0,\ a\in\mathbb{R}$

Α. Να περιορίσετε κατάλληλα την τιμή του α, ώστε η εξίσωση να παριστάνει κύκλο.

Β. Να βρείτε την τιμή του α, ώστε η ευθεία με εξίσωση: y=-x+1 να εφάπτεται του κύκλου.

Γ. Για α=7, να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο του Μ(2,-1)

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

ΘΕΜΑ 11°

Δίνονται οι κύκλοι με εξισώσεις: $C_1 : x^2 + y^2 - 6y + 8 = 0$ και $C_2 : x^2 + y^2 + 6y - 72 = 0$

Α. Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες τους.

Β. Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων.

Γ. Αν τα σημεία Μ και Ν διατρέχουν τους δύο κύκλους, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του μήκους ΜΝ καθώς και τις συντεταγμένες των σημείων Μ και Ν για τα οποία η απόσταση ΜΝ γίνεται ελάχιστη και μέγιστη αντίστοιχα.

Δ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $A(x,y)$ που είναι κέντρα των κύκλων οι οποίοι εφάπτονται εσωτερικά του C_2 και εξωτερικά του κύκλου C_1 .

ΘΕΜΑ 12°

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - y^2 + 4x + 4 = 0$

Α. Να δείξετε ότι παριστάνει δύο κάθετες ευθείες.

Β. Αν οι ευθείες τέμνονται στο σημείο Γ και η κάθε μία τους τέμνει την y=2x+3 στα Α και Β , να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ που σχηματίζεται.

Γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ.

ΘΕΜΑ 13°

Δίνεται κύκλος C με εξίσωση: $x^2 + y^2 = 4$.

Α. Αν ΑΒ είναι μια διάμετρος του κύκλου C, όπου $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ να δικαιολογήσετε ότι $x_2 = -x_1$, $y_2 = -y_1$.

Β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Ν για τα οποία ισχύει: $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NB} = 5$

Γ. Να βρείτε για ποια σημεία (x,y) του επιπέδου ισχύει η σχέση : $4 \le x^2 + y^2 \le 9$.

ΘΕΜΑ 14°

Δίνεται η εξίσωση $C : x^2 + y^2 - 4kx + 2ky = 0,\ k \in \mathbb{R}$.

Α. Να περιορίσετε κατάλληλα το k ώστε η C να είναι κύκλος, και να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων.

Β. Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι της οικογένειας C , διέρχονται από σταθερό σημείο.

Γ. Να βρείτε – αν υπάρχει – κύκλος της οικογένειας που να εφάπτεται της ευθείας με εξίσωση y=2x+1.

Δ. Η ευθεία με εξίσωση y=-3x-2, τέμνει τους κύκλους της οικογένειας στα σημεία Α και Β ώστε η γωνία $AOB = 90^\circ$. Να βρείτε την τιμή του k.

ΘΕΜΑ 15°

Δίνεται η ευθεία με εξίσωση: $\left(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 2\right)x + \left(|\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\right)y + 2\text{συν}\varphi + 1 = 0,\ \ \varphi = \left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)$. Γνωρίζουμε ότι η ευθεία περνά από το (0,0) και σχηματίζει γωνία 45° με τον xx΄.

Α. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων.

Β. Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 1$ και $|\vec{\beta}| = 2$.

Γ. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ