ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ΄ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ CORONA3 – 1920

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα Fermat **(2+6=8 μονάδες)**

Α2. Δίνεται ο ισχυρισμός: «Αν μια συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη, τότε όλα τα κοινά σημεία της με την αντίστροφή της, βρίσκονται πάνω στην ευθεία y=x». Να χαρακτηρίσετε ως «Αληθή» ή «Ψευδή» τον ισχυρισμό και να δικαιολογήσετε την άποψή σας. **(1+3=4 μονάδες)**

Α3. Πότε μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και πότε στο κλειστό [α, β] ; **(3 μονάδες)**

Α4. Χαρακτηρίστε ως «Σωστό» ή «Λάθος» τους παρακάτω ισχυρισμούς:

α. Μια συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα, παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

β. Μια συνάρτηση f , παραγωγίσιμη σε ένα σύνολο Α , για την οποία ισχύει ότι $f'(x)=0$ για κάθε $x \in A$ είναι σταθερή.

γ. Μια συνάρτηση f που εμφανίζει τοπικά ακρότατα, έχει μία τουλάχιστον οριζόντια εφαπτομένη σε κάποιο από αυτά.

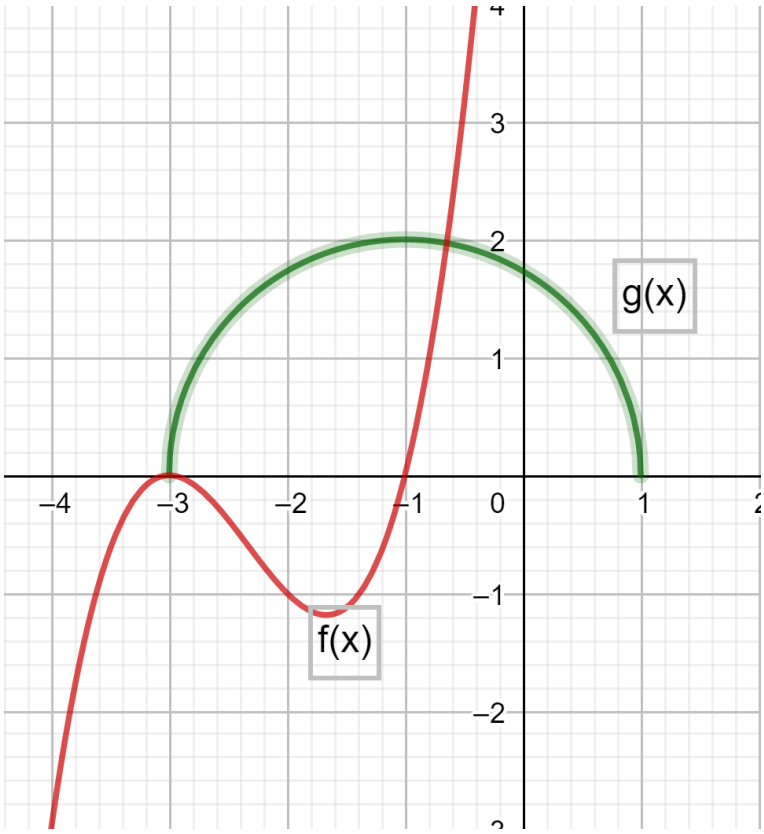
δ. Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το R και παραγωγίσιμη στο R η οποία δεν είναι 1-1, έχει μία τουλάχιστον οριζόντια εφαπτομένη.

ε. Αν $f(x)=\ln x$ και $g(x)=e^x$, ισχύει $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g.



Β1. Να βρείτε – εφόσον υπάρχουν -τα παρακάτω όρια:

a. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{1}{g(x)}$ b. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{g(x)}{f(x)}$

c. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)}{f(x)}$ d. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)g(x)}{(x+2)^2}$

(12 μονάδες)

Β2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x)=\dfrac{g(x)}{g'(x)}$. **(4 μονάδες)**

Β3. Να δικαιολογήσετε ότι υπάρχει σημείο στο οποίο η εφαπτομένη της $g(x)$ είναι παράλληλη στην ευθεία y=x.

(4 μονάδες)

Β4. Να δικαιολογήσετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο στο [-3, -1] στο οποίο οι εφαπτόμενες των καμπύλων f και g είναι παράλληλες μεταξύ τους. Θεωρήστε δεδομένο ότι η διαφορά g(-1)-f(-1) δεν είναι η μεγαλύτερη απόσταση των δύο γραμμών. **(5 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Αν f είναι μια συνάρτηση συνεχής στο [0,4] και παραγωγίσιμη στο (0,4] για την οποία γνωρίζουμε ότι f(0)=4 και $\sqrt{x}\cdot f'(x)=\sqrt{x}-2$, τότε:

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\left(\sqrt{x}-2\right)^2$ **(5 μονάδες)**

Γ2. Να βρείτε τις συναρτήσεις $(f\circ f)(x)$ καθώς και την αντίστροφη συνάρτηση της f. **(6 μονάδες)**

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση: $(f\circ f)(x^2)=f^{-1}(x)$, στο $(0,2)$. **(4 μονάδες)**

Γ4. Να βρείτε τα όρια: i. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x}-5}{f(x)-1}$ και ii. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\eta\mu(f(x))}{x-4}$ **(4+2=6 μονάδες)**

Γ5. Σημείο Μ κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f , ενώ η προβολή του Α στον άξονα xx΄ , κινείται με ταχύτητα 1cm/s. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΑΜΟ (όπου Ο η αρχή των αξόνων) τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σημείο Μ έχει τεταγμένη 1cm. **(4 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η ορισμένη στο R συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=xa^2+3(x+\eta\mu x)+2a\sigma\upsilon\nu x,\ a\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης f και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f(x)=0. **(8 μονάδες)**

Δ2. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α και τον τύπο της συνάρτησης f , αν γνωρίζετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μία θετική ρίζα και πως ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2a}{x}=7$. **(7 μονάδες)**

Έστω ότι η $f(x)=4x+3\eta\mu x-2\sigma\upsilon\nu x$.

Δ3. Να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της συνάρτησης f η οποία να διέρχεται από την αρχή των αξόνων. **(4 μονάδες)**

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+x^2-2x-2=0$, με $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$, είναι αδύνατη.

(6 μονάδες)