ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΕ ΟΛΗ ΤΗΝ ΥΛΗ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΘΕΜΑΤΑ Α

Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» και να δικαιολογήσετε την άποψή σας για τους παρακάτω ισχυρισμούς:

1. Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού ν>2 η οποία έχει ασύμπτωτη.

2. Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, δεν είναι απαραίτητα παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

3. Αν f, g συναρτήσεις ορισμένες στο R για τις οποίες ισχύουν:
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x)g(x)\right) = 0.$

4. Για μια συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και γνωρίζουμε ότι $f''(x_0)=0$, τότε η συνάρτηση έχει σημείο καμπής στο x_0 .

5. Αν f, g συναρτήσεις ορισμένες στο R για τις οποίες ισχύουν:
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x)+g(x)\right) = 0.$

6. Για κάθε συνάρτηση f για την οποία γνωρίζουμε ότι
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = -\infty.$

7. Για κάθε συνάρτηση η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο R, ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε x.

8. Για κάθε συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και γνήσια φθίνουσα στο R, ισχύει $f'(x)<0$ για κάθε x.

9. Μια συνάρτηση η οποία είναι 1-1 σε ένα σύνολο Α, είναι και γνήσια μονότονη σε αυτό.

10. Μια συνάρτηση ορισμένη στο R, η οποία εμφανίζει ασυνέχεια στα σημεία α, β (α<β) , μπορεί να είναι συνεχής στο [α , β].

11. Μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α ,β] , δεν μπορεί να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

12. Αν το άθροισμα δύο συναρτήσεων (δηλ. η συνάρτηση f+g) είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε και κάθε μία από τις f , g ήταν συνεχής στο x_0.

ΘΕΜΑΤΑ Β - Γ

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x - 6\sqrt{x} + 10,\ x \in [0,+\infty)$, καθώς και η συνάρτηση $g(x) = f(x) - 1,\quad x \in [0,9]$.

Β1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή. (8 μονάδες)

Β2. Να αποδείξετε ότι $\left(g \circ g\right)(x) = x,\ \textit{για κάθε}\ x \in [0,9].$ (8 μονάδες)

Β3. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x^2) + f(x^3 - 3x^2 + 9) = 2$ (9 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^3 + 6,\ x \in \mathbb{R}.$

Β1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της. (7 μονάδες)

Β2. Να βρείτε – αν υπάρχουν – τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)$ και $f^{-1}(x)$. (6 μονάδες)

Β3. Να κατασκευάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των

$f(x),\ x\in[-2,0]$ και $f^{-1}(x),\ x\in[0,6]$. (5 μονάδες)

Β4. Να λυθεί η ανίσωση: $f^{-1}(f(\ln x+x-1)+8)>2$ (7 μονάδες)

ΘΕΜΑ3

Β1. Δίνεται ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\cdot 2^x-5\cdot a^{x+1}}{3\cdot a^x+2^{x+2}}=-5$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-ax+2}+x-1\right)=b$

i. Να αποδείξετε ότι α=3. **(5 μονάδες)**

ii. Να αποδείξετε ότι $b=\dfrac{1}{2}$ **(4 μονάδες)**

iii. Για τις τιμές των α, b που βρήκατε παραπάνω, να υπολογίσετε το : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2bx^3+4x}{x^2+x+3}\cdot ημ\dfrac{a}{x}$

(3 μονάδες)

Β2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$i.\ \lim\limits_{x\to2}\dfrac{1-συν(x-2)}{x^2-4x+4}$ (5 μονάδες) $ii.\ \lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{\sqrt{-4x}-\sqrt[3]{x+9}}$ (8 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4

Β1. Να υπολογίσετε τις τιμές των πραγματικών α, β για τις οποίες ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-ax+\beta}{x-2}=5$

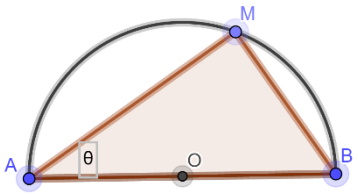
(9 μονάδες)

Β2. Να βρείτε – αν υπάρχει – το όριο: $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{|x^2-4|+2x-4}{|-x^2+x+2|}$ **(8 μονάδες)**

Β3. Να βρείτε τα όρια: $i.\ \lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+3x^2+3x+1}$ $ii.\ \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2x-1}{x-ημx}$ **(4+4 μονάδες)**

ΘΕΜΑ 5

Το σημείο Μ στο διπλανό σχήμα, μπορεί να κινείται στο ημικύκλιο με διάμετρο ΑΒ=δ. Ονομάζουμε x την απόσταση ΑΜ και θ την γωνία ΜΑΒ.



Β1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$\alpha.\ \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{MB}{MA}$ $\beta.\ \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{AM}{MB}$ $\gamma.\ \lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{AM}{AB}$ **(6 μονάδες)**

Β2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδό της λευκής επιφάνειας μέσα στο ημικύκλιο δίνεται από την σχέση:

$$E(x)=\frac{\pi\delta^2-4x\sqrt{\delta^2-x^2}}{8},\ x\in(0,\delta)$$ **(8 μονάδες)**

Β3. Να βρείτε τη γωνία θ ώστε το εμβαδόν της επιφάνειας Ε να γίνεται ελάχιστο , καθώς και την ελάχιστη τιμή του εμβαδού ως συνάρτηση του δ. **(11 μονάδες)**

ΘΕΜΑ 6

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x)=2x\ln x+\dfrac{x^2}{2}-4x+1,\ x\in(0,+\infty)$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει μοναδικό ελάχιστο σε σημείο του διαστήματος (1, 2). **(10 μονάδες)**

Β2. Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι αρνητικός αριθμός. **(5 μονάδες)**

Β3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς δύο λύσεις. **(10 μονάδες)**

ΘΕΜΑ 7

Έστω μια γνήσια αύξουσα συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο [2,3] για την οποία επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις: $f''(x) > 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; f'(3) = f(2) + f(3)$.

Β1. Να αποδείξετε ότι f(2)>0 **(Μονάδες 7)**

Β2. Να δικαιολογήσετε ότι f(x)>0 για κάθε χ στο [2,3]. **(Μονάδες 6)**

Β3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = (x-2)f'(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο [2,3]. **(Μονάδες 12)**

ΘΕΜΑ 8

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = xe^x - \left(1+e^x\right)\ln(1+e^x),\;\; x \in \left(0,+\infty\right) \;\; \kappa\alpha\iota \;\; g(x) = \left(1+e^x\right)^{\frac{1}{x}},\; x \in \left(0,+\infty\right).$$

Γ1. i. Να ελέγξετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. **(Μονάδες 7)**

ii. Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0 \;\; \gamma\iota\alpha \;\; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \;\; x \in \left(0,+\infty\right)$. **(Μονάδες 5)**

iii. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης g(x). **(Μονάδες 6)**

Γ2. Να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια που είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο ακτίνας ρ, το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν. **(Μονάδες 7)**

ΘΕΜΑ 9

Έστω f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο R, για τις οποίες ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)f(x+h)-xf(x)}{h} > e^x$
- $g(x) = xf(x)\;,\; x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να δείξετε ότι: $f(x) > \dfrac{e^x-1}{x}$ για κάθε $x \neq 0$. **(Μονάδες 8)**

Γ2. i. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **(Μονάδες 6)**

ii. Να δείξετε ότι $f(0) \geq 1$ **(Μονάδες 6)**

iii. Να βρείτε το $g([0,+\infty))$ **(Μονάδες 5)**

ΘΕΜΑ 10

Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους: $f(x) = \dfrac{\ln x}{1-x}$ και $g(x) = \ln x \cdot \ln(1-x),\;\; x \in (0,1)$.

Γ1. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης f. **(Μονάδες 7)**

Γ2. Να δείξετε ότι $g'(x) = f(1-x) - f(x),\;\; x \in (0,1)$ και να μελετηθεί η συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία. **(Μονάδες 5)**

Γ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της g . **(Μονάδες 7)**

Γ4. Να δείξετε ότι $g(1-x)=g(x)$ και να συγκρίνετε τους $g\left(\frac{1}{3}\right)$ και $g\left(\frac{3}{5}\right)$. **(Μονάδες 6)**

ΘΕΜΑ 11

Για την παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ συνάρτηση f ισχύουν οι σχέσεις:

$$x\left(x^2+1\right)f'(x)+x^2f(x)=\sqrt{x^2+1}\ ,\ \ x\in\left(0,+\infty\right)\ \text{και}\ \lim_{x\to1}\frac{f(x^2)}{f(x)}=2.$$

Γ1. Να δειχθεί ότι f(1)=0 και στη συνέχεια να δείξετε ότι: $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}}$ **(Μονάδες 3+5)**

Γ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει σε σημείο $x_o\in\left(e,e\sqrt[3]{e}\right)$, ολικό μέγιστο. **(Μονάδες 6)**

Γ3. Να δείξετε ότι η μέγιστη τιμή της f είναι η $\sqrt{\frac{1}{x_o^{\ 2}}+\frac{1}{x_o^{\ 4}}}$. **(6 μονάδες)**

Γ4. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης f. **(5 μονάδες)**

ΘΕΜΑ 12

Δίνεται η συνεχής στο R συνάρτηση f για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

• $f^2(x)-e^{2x^2}=2e^x(e^{x^2}-f(x))$ και • $f(0)=1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=e^{x^2},\ x\in\mathbb{R}$. **(Μονάδες 6)**

Γ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f. **(Μονάδες 6)**

Γ3. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης : $f(x)=\kappa^2-5\kappa+7$, για τις διάφορες τιμές που μπορεί να παίρνει ο κ. **(Μονάδες 5)**

Γ4. Ένα σημείο M(x, f(x)), x>0, κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f, έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό 1μ/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OMB, όπου O(0,0), B(1,0), τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το A(1, f(1)). **(Μονάδες 8)**

ΘΕΜΑ 13

Για την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f ισχύουν:

$$f'(x)+f(-x)=x^2+2x,\ \ x\in\mathbb{R}\ \text{και}\ f(0)+e^{1+f(0)}=e.$$

Γ1. Να δείξετε ότι: f(0)=0 καθώς και ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. **(Μονάδες 5)**

Γ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\left(f(x)-x^2\right)^2+\left(f'(x)-2x\right)^2$, είναι σταθερή.

(Μονάδες 7)

Γ3. Να δείξετε ότι $f(x)=x^2$. **(Μονάδες 8)**

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς σημείο $M(x_o, f(x_o))$, με $x_o \in (10,11)$, το οποίο απέχει τη μικρότερη απόσταση από το σημείο $A(2021,0)$. **(Μονάδες 5)**

ΘΕΜΑ 14

Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, ισχύει ότι $xf'(x)=(x-2)f(x)$ και $f(1)=e$.

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$, $x>0$. **(Μονάδες 7)**

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα. **(Μονάδες 6)**

Γ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης f. **(Μονάδες 7)**

Γ4. Να κατασκευάσετε πρόχειρα τη γραφική της παράσταση. **(Μονάδες 5)**

ΘΕΜΑ 15

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=2\ln x+x^2-1,\ x\in(0,+\infty)$

Β1. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης. **(Μονάδες 7)**

Β2. Να βρείτε – αν υπάρχουν – τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. **(Μονάδες 5)**

Β3. Αν α και β θετικοί πραγματικοί για τους οποίους ισχύει η σχέση: $\left(\dfrac{a}{\beta}\right)^2=e^{(\beta-a)(\beta+a)}$, να αποδείξετε ότι α=β. **(Μονάδες 6)**

Β4. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των $g(x)=2\ln x$ $\kappa\alpha\iota$ $h(x)=1-x^2$, τέμνονται σε ένα μόνο κοινό σημείο. **(Μονάδες 7)**

ΘΕΜΑ 16

Έστω συνάρτηση $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, συνεχής και γνήσια μονότονη, για την οποία ισχύει η σχέση:

$\ln x+1<f(x)<e^{x-1}-x+1,\ \ \gamma\iota\alpha\ \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ x>1.$

Γ1. Να υπολογίσετε το f(1) και να δικαιολογήσετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα. **(Μονάδες 6)**

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\dfrac{1}{f(x)+1}+\dfrac{1}{x}=1$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1,2).

(Μονάδες 6)

Γ3. Να βρείτε τα α, β αν ισχύει η σχέση: $f(a)+f(\beta)=2$ **(Μονάδες 6)**

Γ4. Να λύσετε την εξίσωση: $f(2^{x-1})+f(4^{x-1})=f(e^{x-1})+f(5^{x-1})$ **(Μονάδες 7)**

ΘΕΜΑ 17

Έστω συνάρτηση f συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία γνωρίζουμε ότι η εφαπτόμενη της στο (0, f(0)) έχει εξίσωση: $y=2x-3$.

Β1. Να βρείτε τα f(0) και f΄(0) καθώς και το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(500x)+f(521x)+6}{x}$ **(Μονάδες 7)**

Β2. Να υπολογίσετε τα όρια: $i.\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x)+3x^2}{\eta\mu^3 2x}$ $\quad ii.\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu 3x-2}{f^2(x)+6f(x)+9}$ **(Μονάδες 12)**

Β3. Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι f(-3)=-9, να δείξετε ότι υπάρχει ξ στο (-3,0) τέτοιο ώστε f΄΄(ξ)=0. **(Μονάδες 6)**

ΘΕΜΑ 18

Δίνεται η συνεχής στο **R** συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\begin{cases} 2ax+a-e^{\frac{1}{x}}, & x<0 \\ \ln(x+1)-x+1, & x\geq 0 \end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι α=1 και να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση της f. **(Μονάδες 6)**

Γ2. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f – αν υπάρχουν. **(Μονάδες 7)**

Γ3. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f(x)=0. **(Μονάδες 7)**

Γ4. Να λύσετε στο [0,2π] την εξίσωση: $f(\eta\mu 2x)+f(\sigma\upsilon\nu x)=2$ **(Μονάδες 5)**

ΘΕΜΑ 19

Δίνεται η παραγωγίσιμη στο 0 και περιττή στο R συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 2x+x}{\eta\mu 25x+11x}$, καθώς και η συνάρτηση με τύπο $g(x)=k\cdot\ln x,\ k\in\mathbb{R}^*$.

Β1. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της συνάρτησης f στο σημείο 0, έστω (ε). **(Μονάδες 7)**

Β2. Να βρείτε το k ώστε η ευθεία (ε) να εφάπτεται και της συνάρτησης g(x), και να προσδιορίσετε και το σημείο επαφής τους. **(Μονάδες 8)**

Β3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(7x)-f(-5x)}{x}$. **(Μονάδες 10)**

ΘΕΜΑ 20

Αν για μια συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ισχύουν οι σχέσεις:

$f(f'(x))+f(x)=0,\ f'(x)>0,\ f(1)=0$, τότε:

Γ1. Να υπολογίσετε το $f'(1)$ και να δείξετε ότι: $f'(f'(x))=x$ **(Μονάδες 2+2)**

Γ2. Να αποδείξετε ότι f(x)=lnx. **(Μονάδες 7)**

Γ3. Να προσδιορίσετε τις τιμές του k, ώστε η συνάρτηση f να έχει δύο ακριβώς κοινά σημεία με την ευθεία με εξίσωση y=x+k. **(Μονάδες 7)**

Γ4. Αν ονομάσουμε α και β τα σημεία τομής της συνάρτησης f με την παραπάνω ευθεία και με δεδομένο ότι k<-1, να δείξετε ότι υπάρχει ξ που ανήκει στο (α, β) τέτοιο ώστε να ισχύει η σχέση: $\alpha\beta(\ln\xi-1)=k\xi^2$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 21

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1},\ x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

Β1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της. **(Μονάδες 8)**

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της. **(Μονάδες 8)**

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης f και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση. **(Μονάδες4+5)**

ΘΕΜΑ 22

Έστω $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $(f'(x))^2-2f'(x)+\dfrac{1}{x^2+1}=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν $f(0)=2$, τότε :

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$ **(Μονάδες 9)**

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. **(Μονάδες 8)**

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της. **(Μονάδες 8)**

ΘΕΜΑ 23

Γ1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο:

$f(x)=\dfrac{ax^2+\beta x+1}{x+2},\ \mu\varepsilon\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=-3,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}^*.$

i. Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β. **(5 μονάδες)**

ii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2f(3x)-x\cdot f(2x)\cdot\eta\mu x}{x^2f(x)-2x^3}\cdot\eta\mu\left(\dfrac{1}{x}\right)$ **(4 μονάδες)**

Γ2. Δίνεται ότι τη συνεχή στο R συνάρτηση g ισχύει η σχέση:

$(x-3)g(x)\le x\cdot\eta\mu(x-3),\ \gamma\iota\alpha\ \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ x\ne 3.$

i. Να βρείτε το g(3). **(4 μονάδες)**

ii. Να δείξετε ότι η g(x) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (1,8). **(5 μονάδες)**

Γ3. Αν για τη συνεχή στο R συνάρτηση f ισχύουν οι σχέσεις: $f(1)=-1\ \ \kappa\alpha\iota\ \ f^2(x)=3+2xf(x)$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f(x).

(7 μονάδες)

ΘΕΜΑ 24

Δίνεται η συνεχής στο [1,4] συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση $f(1)\cdot f(2)\cdot f(4)=-8$. Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση δεν τέμνει τον χχ', να δείξετε ότι:

Γ1. Η συνάρτηση f παίρνει μόνο αρνητικές τιμές. **(5 μονάδες)**

Γ2. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in[1,4]\ \ \tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o\ \ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ \ f(\xi)=-2$.

(10 μονάδες)

Γ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(\xi)+\xi=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [1,4].

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ 25

Δίνεται η συνεχής στο R , συνάρτηση με τύπο: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-ax-2\beta}{x-1}, & x\neq 1\\ \beta, & x=1\end{cases}$, *όπου* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι α=5 και β=-2 και να γράψετε τον τύπο της f(x). **(7 μονάδες)**

Β2. Να λύσετε στο $(0,+\infty)$ *την εξίσωση* $f(x)+2e^{x-1}=0$. **(10 μονάδες)**

Β3. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-\sqrt{x+2}}{\eta\mu(x-2)}$ **(8 μονάδες)**

ΘΕΜΑ 26

Δίνεται η συνεχής στο [1,4] συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

$f(1)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x-3\cdot e^x}{2^x+5\cdot e^x}$, $f(2)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-6x}+x\right)$ και $f(4)=2$. Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση δεν τέμνει τον χχ', να δείξετε ότι:

Γ1. Η συνάρτηση f παίρνει μόνο θετικές τιμές. **(4 μονάδες)**

Γ2. Να δείξετε ότι f(1)=1, f(2)=3 **(4 μονάδες)** , καθώς και ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,4)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=2$. **(4 μονάδες)**

Γ3. Να δείξετε ότι η f(x) δεν είναι 1-1 , καθώς και ότι υπάρχει

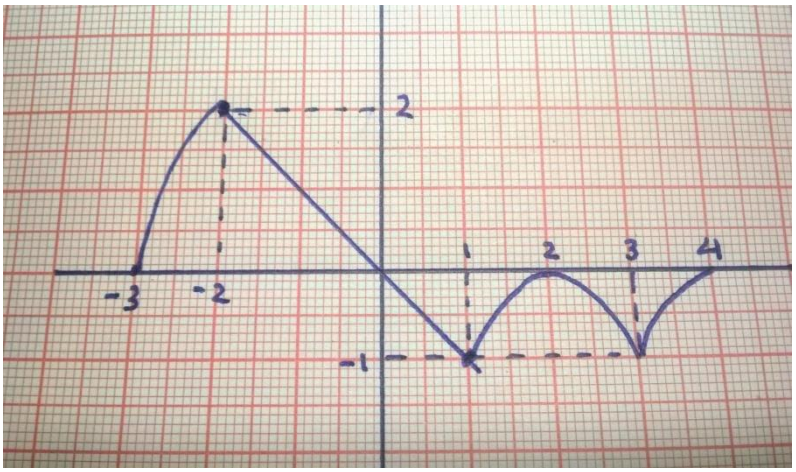
$x_o,\ x_o\in[1,4],$ *ώστε* $f(x_o)=\dfrac{7f(1,5)+3f(3,5)}{10}$ **(2+5 μονάδες)**

Γ4. Αν, επιπλέον, f γνήσια μονότονη στο [1,2] να λύσετε την εξίσωση:

$f(f(e^x+x+1)-1)=f(4)+1$ στο [1,2]. **(6 μονάδες)**

ΘΕΜΑ 27

Στο διπλανό σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f που ορίζεται στο [-3,4], για την οποία επιπλέον γνωρίζουμε ότι f(0)=0.



Β1. Να βρείτε τις θέσεις τοπικών ακροτάτων , τη μονοτονία της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι

$f(x)\le 0$ *για κάθε* $x\in[-3,4]$.

(6 μονάδες)

Β2. Να βρείτε την κυρτότητα της f και τις θέσεις των σημείων καμπής της.

(6 μονάδες)

Β3. Να βρείτε τον τύπο της f για $x \in [-2,1]$ και την εξίσωση εφαπτομένης της f στο σημείο της (1, f(1)).

(7 μονάδες)

Β4. Να υπολογίσετε τα όρια: a. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2f(x)+1}{x-1}$ b. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-3h)-f(1+2h)}{h}$

(6 μονάδες)

ΘΕΜΑ 28

Έστω f(x) μια συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ συνάρτηση για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$f(x)+xf'(x)=e^{-xf(x)}$ *και* $f(1)=\ln 2.$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(x+1)}{x}, & x>0\\ 1, & x=0\end{cases}$ **(5 μονάδες)**

Γ2. Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. **(5 μονάδες)**

Γ3. Να βρείτε την τιμή του θ, $\theta \in [0,2\pi]$, ώστε η εξίσωση f(x)=ημθ+2 να έχει λύση στο $[0,+\infty)$ και να βρείτε τη λύση αυτή. **(7 μονάδες)**

Γ4. Αν η F(x) είναι μια αρχική της f , να λύσετε την ανίσωση:

$F(\ln^2 x+2021)-F(\ln^2 x+2020)<F(\ln x+2021)-F(\ln x+2020)$ **(8 μονάδες)**

ΘΕΜΑ 29

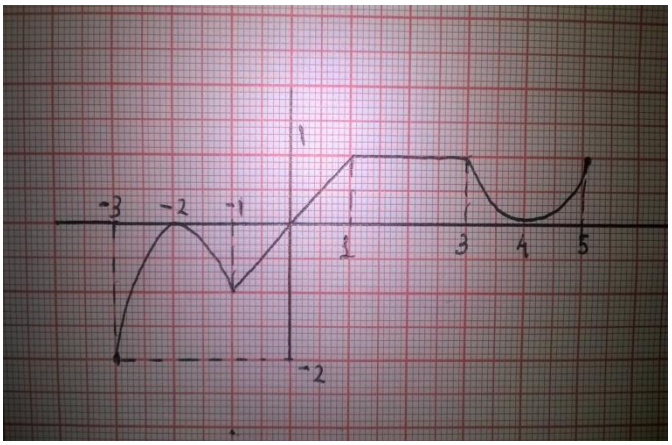
Η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Β1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f καθώς και τα σημεία στα οποία παρουσιάζει ακρότατα.

(5 μονάδες)

Β2. Να βρείτε την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης f.

(8 μονάδες)



Β3. Να βρείτε όσα από τα παρακάτω όρια υπάρχουν και να δικαιολογήσετε όσα ισχυρίζεστε πως δεν υπάρχουν.

$\alpha.\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ b. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h^3}$ c. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x^2+x}$ **(6 μονάδες)**

Β4. Η συνάρτηση f, έχει ασύμπτωτες; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(2 μονάδες)

Β5. Αν γνωρίζετε ότι f(-3)=5, f(0)=-2 και f(5)=7, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f(x)=0.

(4 μονάδες)

ΘΕΜΑ 30

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases}\ln(x^2+e)+ax, & x<0\\ \dfrac{2x^2+1}{x^2+1}+ax, & x\geq 0\end{cases}$$,$a\in\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)\geq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι α=0. **(Μονάδες 6)**

Γ2. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f(x). **(Μονάδες 6)**

Γ3. Αν για τη συνεχή στο R συνάρτηση g(x) ισχύει η σχέση:

$f(x)+\eta\mu(f(x))\leq g(x)\leq 1+f(x)$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}$. **(Μονάδες 6)**

Γ4. Να βρείτε για ποιες τιμές του θετικού αριθμού k , η εξίσωση $f(x)\cdot f(k-1)=f(\ln k)$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$. **(Μονάδες 7)**

ΘΕΜΑ 31

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=(x-a)^3+k,\ \ a,k\in\mathbb{R}$, για την οποία γνωρίζουμε ότι δέχεται εφαπτομένη στο σημείο της $A(2,f(2))$ την ευθεία με εξίσωση $y=3a^2x-3$.

Β1. i. Να αποδείξετε ότι α=1 και k=2. **(Μονάδες 3)**

ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει και άλλο ένα κοινό σημείο $B(x_1, f(x_1))$ με την εφαπτομένη της στο Α, στο οποίο η κλίση της καμπύλης f είναι τετραπλάσια από την κλίση της στο Α. **(Μονάδες 3)**

Β2. Ένα υλικό σημείο Μ(α, f(α)) κινείται πάνω στην καμπύλη της συνάρτησης f, με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του ίσο με 2 m/s. Να βρείτε την ταχύτητα με την οποία κινείται στον κατακόρυφο άξονα το σημείο τομής Ν της εφαπτομένης της στο Μ με τον yy΄, την χρονική στιγμή t_o κατά την οποία η τεταγμένη του Μ ισούται με (-6). **(Μονάδες 9)**

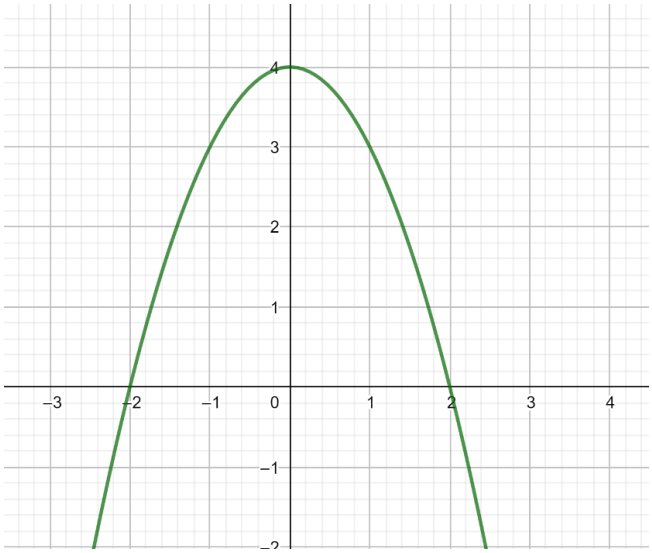
Β3. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της. **(Μονάδες 5)**

Β4. Να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}(f^{-1}(\ln 2x)-5)<-1$ **(Μονάδες 5)**

ΘΕΜΑ 32

Στο διπλανό σχήμα, φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f, η οποία είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο R και για την οποία γνωρίζουμε ότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}=k,\ k\in\mathbb{R}.$$



Β1. Να αποδείξετε ότι f(0)=2 και να υπολογίσετε την τιμή του k. **(4 μονάδες)**

Β2. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f , τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων της καθώς και το σημείο καμπής της. **(9 μονάδες)**

Β3. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της συνάρτησης f στο 0 και να αποδείξετε ότι η εξίσωση

f(x)=4x+2 έχει μοναδική ρίζα το 0.

(6 μονάδες)

Β4. Να υπολογίσετε τα όρια: α. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x^2-2}{x^2+\eta\mu x}$ β. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-x}{(x-2)\eta\mu(\pi x)}$ **(6 μονάδες)**

ΘΕΜΑ 33

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x,\ x\in[0,\pi]$.

Γ1. Να βρείτε τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης.

(10 μονάδες)

Γ2. Να φτιάξετε τον πίνακα μεταβολών της συνάρτησης και να κατασκευάσετε πρόχειρα τη γραφική της παράσταση. **(5 μονάδες)**

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x)\le\sqrt{2}x-\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4},\ x\in[0,\pi]$. **(5 μονάδες)**

Γ4. Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu\left(\dfrac{3\pi}{4}\eta\mu x\right)-\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{3\pi}{4}\eta\mu x\right)=\sqrt{2},\ x\in[0,\pi]$. **(5 μονάδες)**

ΘΕΜΑ 34

Δίνεται η συνεχής στο $[1,+\infty)$ συνάρτηση f για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$f(x)\cdot f'(x)=\dfrac{1}{2}$ *και* $f(x)>0$ *για κάθε* $x>1$, $f(1)=0$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x-1}$ και να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων. **(3+3 μονάδες)**

Γ2. Αν M(α, f(α)), α>2, σημείο που κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f , (ε) η εφαπτομένη στο M, K η προβολή του M στον οριζόντιο άξονα και N το σημείο τομής της (ε) με τον άξονα xx΄, να βρείτε τις συντεταγμένες του N ως συνάρτηση του α **(7 μονάδες)** και το την ταχύτητα με την οποία απομακρύνεται το N από το (0,0), αν είναι γνωστό ότι το σημείο K κινείται με ταχύτητα 1μ/s.

(3 μονάδες)

Γ3. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου KMN την χρονική στιγμή κατά την οποία το σημείο M έχει τετμημένη 5. **(9 μονάδες)**

ΘΕΜΑ 35

Στο σχήμα που βλέπετε, η ακτίνα r του μικρού κυκλικού δίσκου μεγαλώνει με ρυθμό 2cm/sec , ενώ η ακτίνα R του μεγάλου κυκλικού δίσκου μεγαλώνει επίσης με ρυθμό 1cm/sec. Τη χρονική στιγμή t=0, η ακτίνα του μικρού δίσκου ήταν 1m ενώ εκείνη του μεγάλου ήταν 3m. Η διαδικασία διαρκεί μέχρι τη στιγμή που οι δύο δίσκοι αποκτούν ίσες ακτίνες.

Γ1. Να βρείτε πόσο διαρκεί η διαδικασία και να δείξετε ότι ο τύπος που δίνει το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου ανάμεσα στους δύο δίσκους δίνεται από τη σχέση:

$E(t)=(-3t^2+200t+80000)\cdot\pi\ (cm^2)$

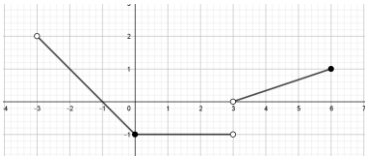
(Μονάδες 8)

Γ2. Να βρείτε σε ποια χρονική στιγμή το εμβαδόν του δακτυλίου γίνεται μέγιστο και να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού αυτού μειώνεται συνεχώς. **(Μονάδες 4+3)**

Γ3. Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο ακριβώς χρονικές στιγμές κατά τις οποίες το εμβαδόν του δακτυλίου γίνεται ίσο με 81000π cm^2 , ενώ υπάρχει ακριβώς μία χρονική στιγμή κατά την οποία το εμβαδόν του δακτυλίου ισούται με 66666π cm^2. **(Μονάδες 10)**

ΘΕΜΑ 36

Στο σχήμα που ακολουθεί, φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f΄ μιας συνεχούς στο (-3, 6] συνάρτησης, για την οποία επιπλέον ισχύει f(-1)=0.



Β1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}-x-\dfrac{1}{2}, & -3<x\le 0 \\ -x-\dfrac{1}{2}, & 0<x\le 3 \\ \dfrac{1}{6}x^2-x-2, & 3<x\le 6 \end{cases}$ **(Μονάδες 7)**

Β2. Υπάρχουν σημεία στα οποία η f΄ είναι ασυνεχής; Εξηγήστε τον ισχυρισμό σας. **(Μονάδες 4)**

Β3. Να βρείτε την μονοτονία, τα ακρότατα και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f. **(Μονάδες 8)**

Β4. Να υπολογίσετε τα όρια: $i.\ \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f^2(x)}$ $\quad ii.\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sigma\upsilon\nu(2f(x)+3)-1}{(2f(x)+3)^2}$ **(Μονάδες 6)**

ΘΕΜΑ 37

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\ln(1-e^x)+x,\quad x\in(-\infty,0)$

Γ1. Να βρείτε τη μονοτονία, τα ακρότατα και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f **(Μονάδες 5+1+4)**

Γ2. Έστω g(x) η συνάρτηση με τύπο $g(x)=f(\ln x)+2\ln 2$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και – αν υπάρχουν – τα σημεία τομής της με τον xx΄ . **(Μονάδες 5)**

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f' είναι γνήσια φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της. **(Μονάδες 3)**

Γ4. Να λύσετε την ανίσωση: $f(-x^2)+f(x-3)<f(-x^2-1)+f(x-2)$ **(Μονάδες 7)**

ΘΕΜΑ 38

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{x^2}{8}+k$ και $g(x)=\ln x$.

Γ1. Να βρείτε τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα της συνάρτησης $h(x)=f(x)-g(x)$.

(Μονάδες 6).

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g για τις διάφορες τιμές που μπορεί να πάρει ο πραγματικός αριθμός k. **(Μονάδες 5)**

Γ3. Για $k=\frac{1}{8}$

i. Να βρείτε την εφαπτομένη της h(x) στο σημείο της A(1,h(1)) **(Μονάδες 3)**

ii. Να δικαιολογήσετε ότι $x^2+6x+1\geq 8(1+\ln x)$, για κάθε $x>0$. **(Μονάδες 4)**

iii. Να λύσετε την ανίσωση : $h(x^2)>h(1-x^2)$ όταν $x\in(0,1)$. **(Μονάδες 7)**

ΘΕΜΑ 39

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $g(x)=\sqrt{1-x^2}$.

Γ1. Να βρείτε όλες τις συνεχείς στο (0,π) συναρτήσεις f , για τις οποίες ισχύει $(g\circ f)(x)=|\eta\mu x|$.

(Μονάδες 8)

Γ2. Έστω $f(x)=|\sigma\upsilon\nu x|$, $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $\frac{f(x)+\eta\mu\alpha+\alpha}{2x+\pi}=\frac{\alpha-f(x)}{2x-\pi}$, με $\alpha>0$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. **(Μονάδες 6)**

Γ3. Έστω $f(x)=|\sigma\upsilon\nu x|$, $x\in\mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(g\circ f)(x)-x}{\eta\mu x+2}$. **(Μονάδες 5)**

Γ4. Σημείο Μ κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της συνάρτησης g και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 2 μον/s. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του, τη χρονική στιγμή που το σημείο Μ βρίσκεται στη θέση $A\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **(Μονάδες 6)**

ΘΕΜΑ 40

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x)=\ln x-\sqrt{1-x}$

Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να δείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη. **(Μονάδες 5)**

Β2. Να βρείτε το σύνολο τιμών και τις ασύμπτωτες – αν υπάρχουν - της συνάρτησης f. **(Μονάδες 6+3)**

Β3. Να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot f^{-1}(x)$ **(Μονάδες 5)**

Β4. Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδικό σημείο καμπής. **(Μονάδες 6)**