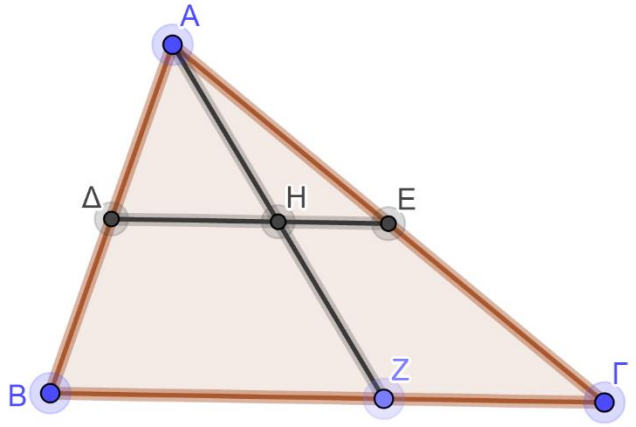
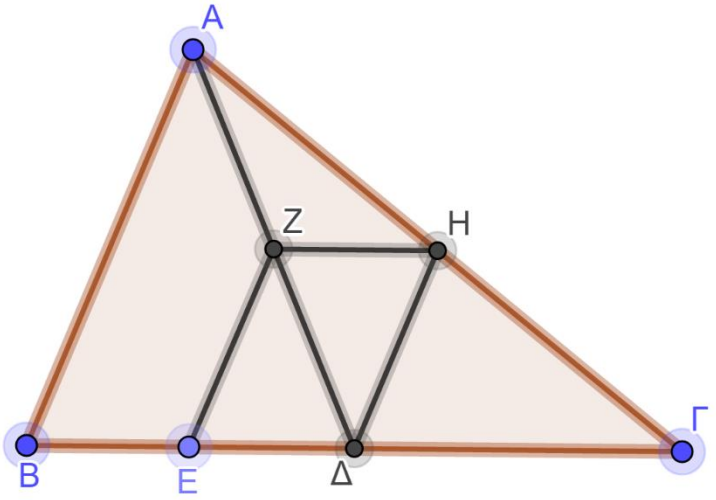
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ (σελ.115)

Ασκήσεις εμπέδωσης

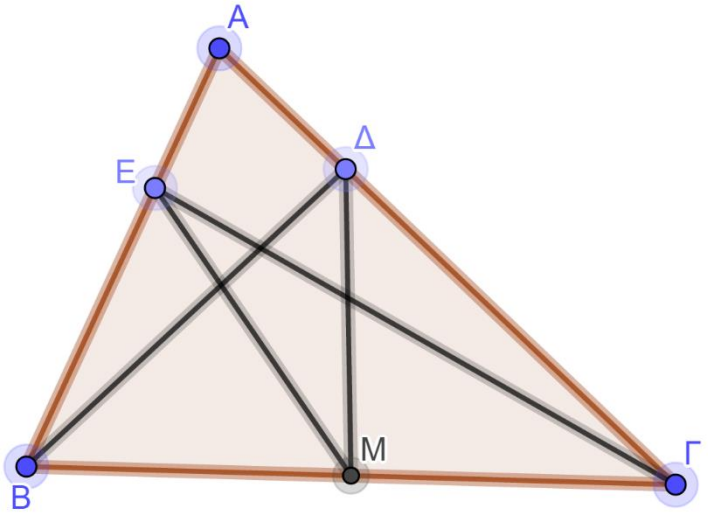
1. Αν τα Δ και Ε είναι μέσα των ΑΒ και ΑΓ και το Ζ τυχαίο σημείο της βάσης ΒΓ, να δείξετε ότι το Η μέσον της πλευράς ΑΖ.



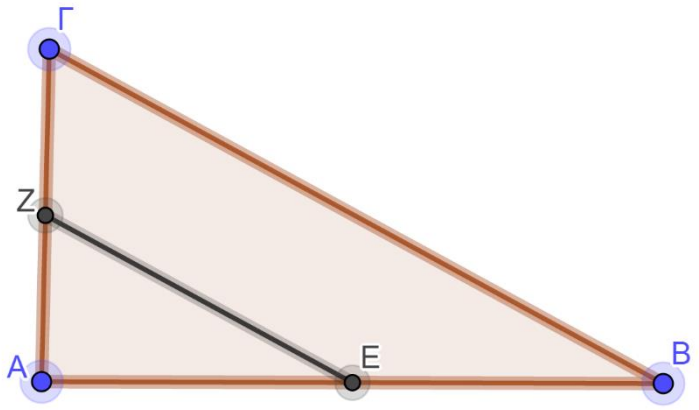
2. Αν ΑΔ διάμεσος, Ε μέσον ΒΔ, Ζ μέσον ΑΔ και Η μέσον ΑΓ, να αποδείξετε ότι το ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.



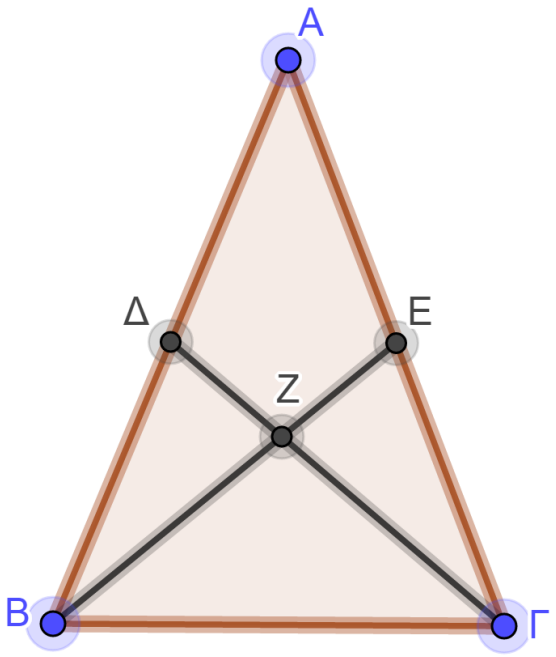
3. Αν τα ΒΔ και ΓΕ είναι ύψη και Μ μέσον της ΒΓ, να αποδείξετε ότι ΜΔ=ΜΕ.



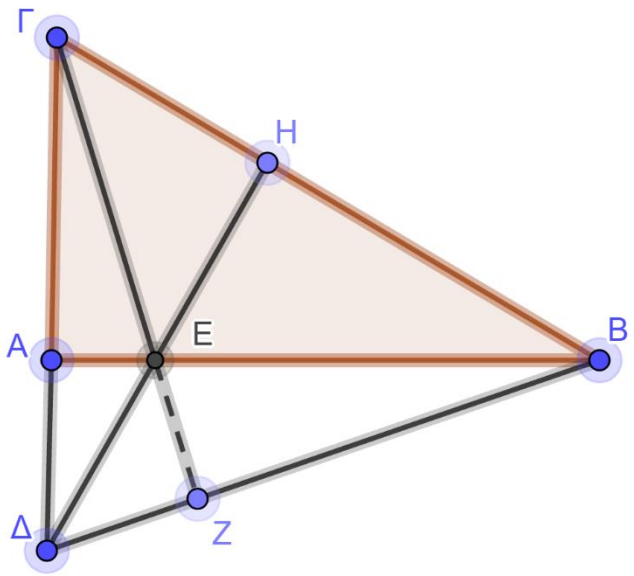
4. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, η γωνία Β=30° και Ε και Ζ είναι μέσα των ΑΒ και ΑΓ, να δείξετε ότι ΕΖ=ΑΓ.



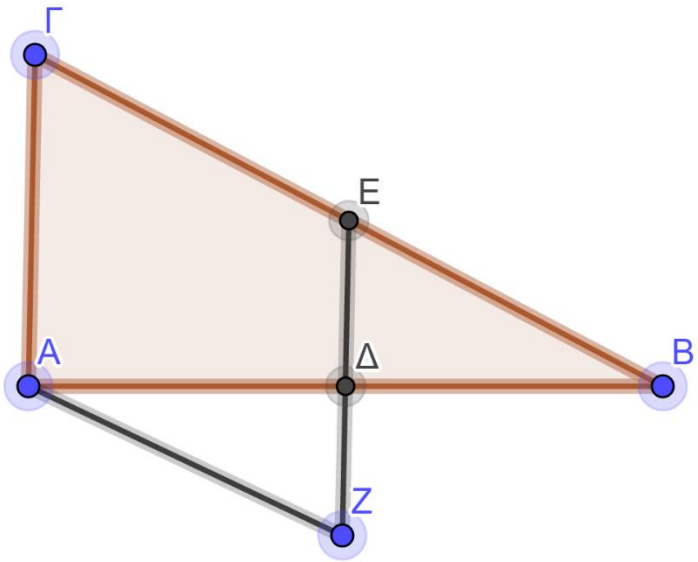
5. Σε τρίγωνο ΑΒΓ, οι διάμεσοι ΒΔ και ΓΕ είναι ίσοι. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.



6. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, προεκτείνουμε τη ΓΑ κατά τυχαίο τμήμα ΑΔ και φέρνουμε ΔΗ κάθετη στη ΒΓ , η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε. Να αποδείξετε ότι ΓΕ κάθετη στη ΔΒ.



7. Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχει Β=30° και Δ μέσον ΑΒ και Ε μέσον ΒΓ. Προεκτείνουμε την ΕΔ κατά τμήμα ΔΖ=ΕΔ . Να αποδείξετε ότι το ΑΓΕΖ είναι ρόμβος.

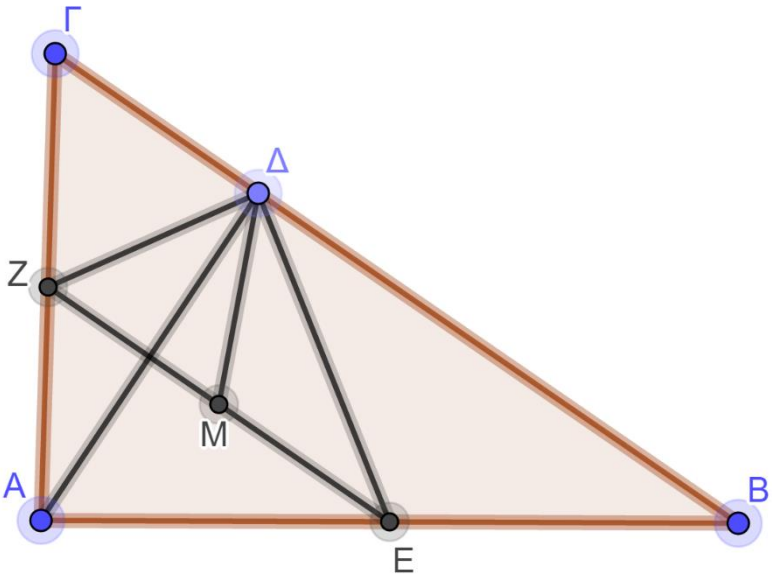


Αποδεικτικές ασκήσεις

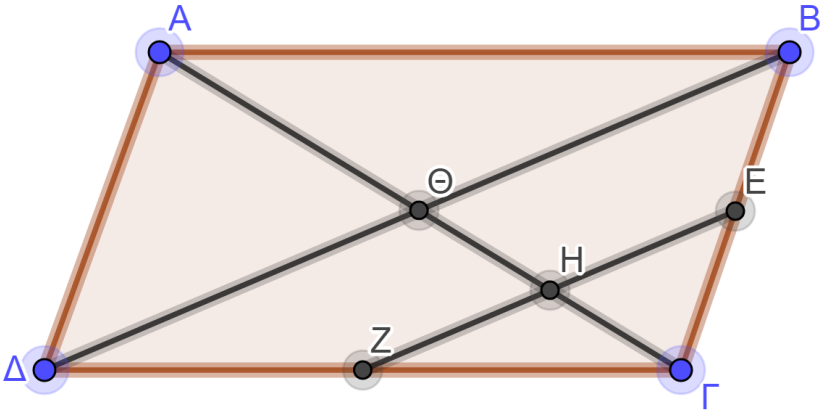
1. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο , το ΑΔ είναι ύψος και Ε και Ζ μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, τότε

i. Να αποδείξετε ότι ΕΔΖ=90° και

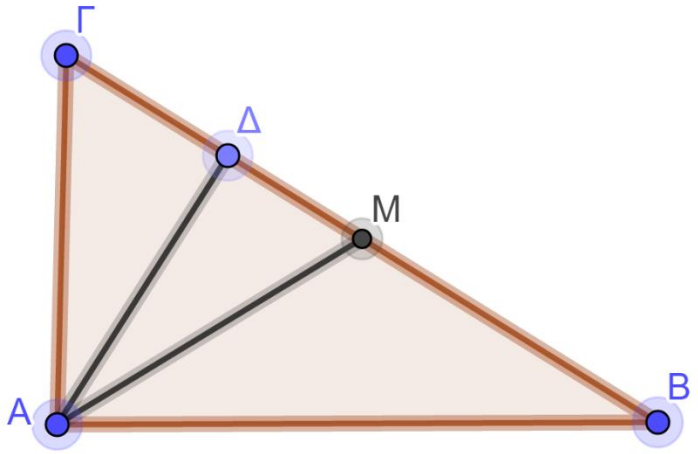
ii. Αν Μ μέσο ΕΖ, να δείξετε ότι ΔΜ=ΒΓ/4.



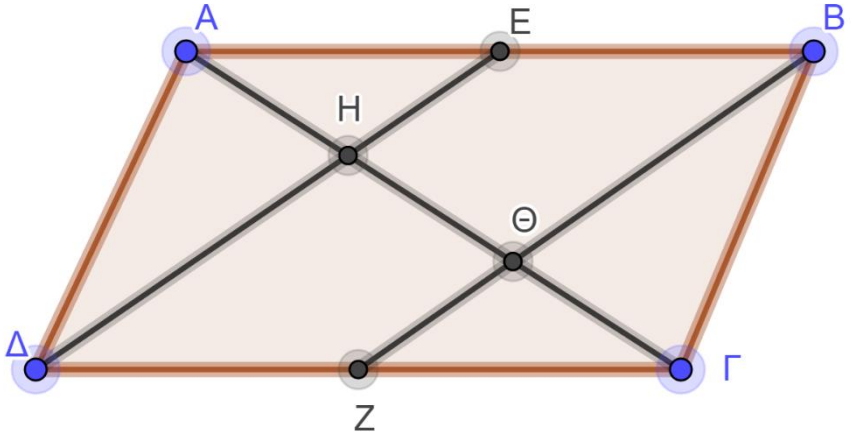
2. Το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και τα Ε και Ζ μέσα των ΒΓ και ΓΔ. Η ΕΖ τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο σημείο Η . Να αποδείξετε ότι ΓΗ=ΑΓ/4.



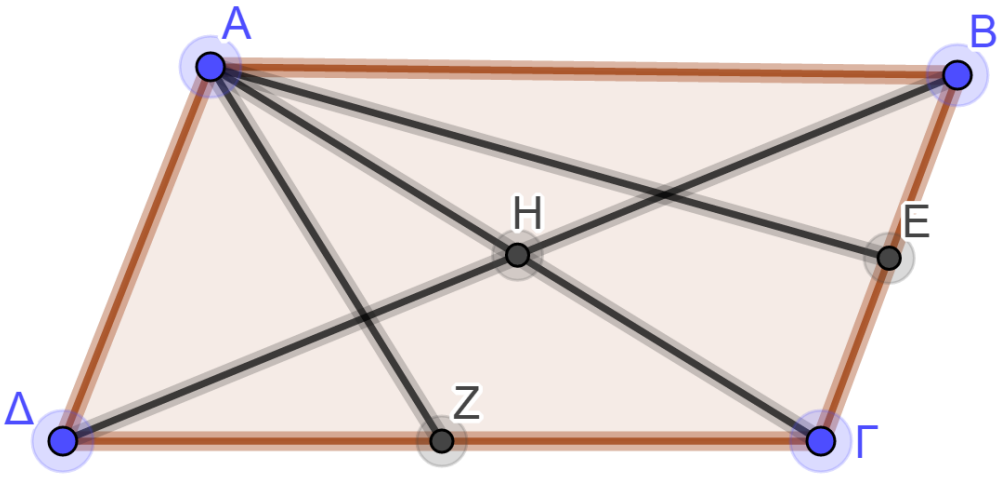
3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, το ΑΜ είναι διάμεσος και το ΑΔ είναι ύψος. Να αποδείξετε ότι η γωνία ΜΑΔ= Β-Γ.



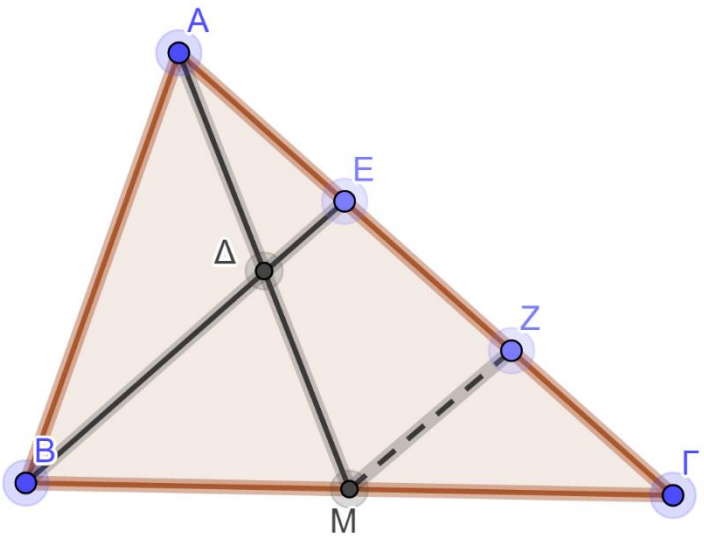
4. Αν τα Ε και Ζ μέσα των πλευρών ΑΒ, ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι ΔΕ και ΒΖ τριχοτομούν τη διαγώνιο ΑΓ.



5. Αν τα Ε και Ζ μέσα τω πλευρών ΒΓ, ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι ΑΕ και ΑΖ τριχοτομούν τη διαγώνιο ΒΔ.

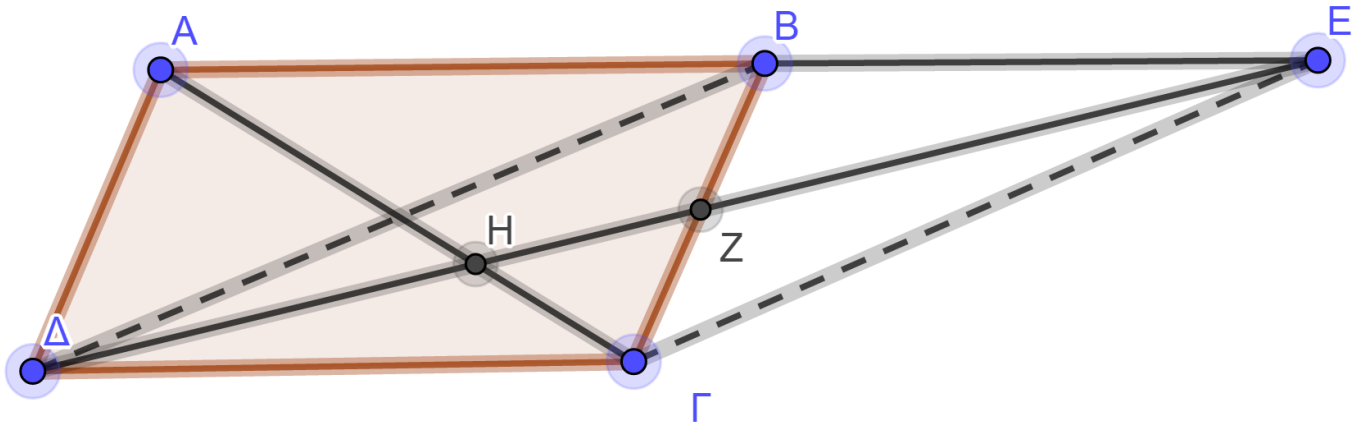


6. Σε τρίγωνο ΑΒΓ, με διάμεσο ΑΜ, ονομάζουμε Δ το μέσον της ΑΜ κι φέρνουμε την ΒΔ η οποία προεκτεινόμενη τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι ΑΕ=ΕΓ/2.

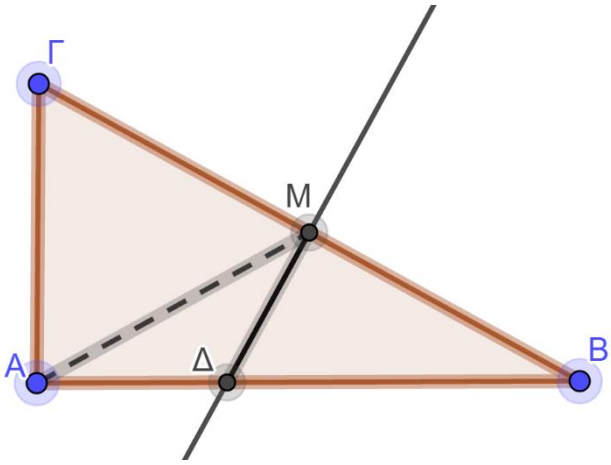


7. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ=ΑΒ. Αν η ΔΕ τέμνει την ΑΓ στο Η κι τη ΒΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι :

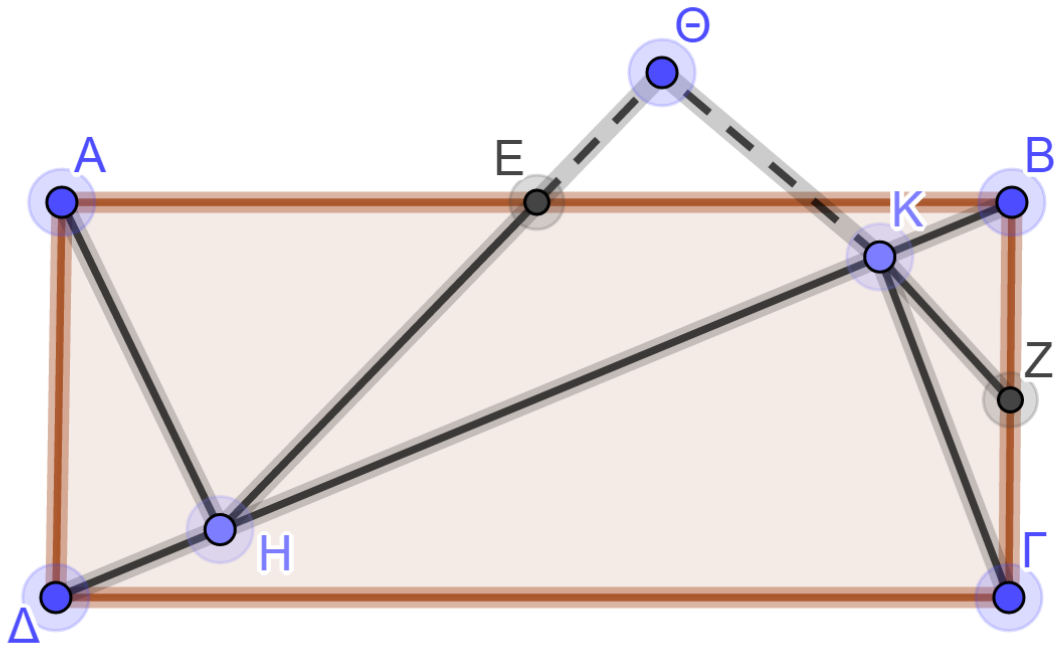
i. ΒΖ=ΖΓ ii. ΑΗ=2ΓΗ



8. Σε ορθογώνιο τρίγωνο με Β=30° , η κάθετος στο μέσο Μ της υποτείνουσας ΒΓ, τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Να αποδείξετε ότι: i. ΜΔ=ΑΔ και ii. ΑΒ=3ΜΔ.

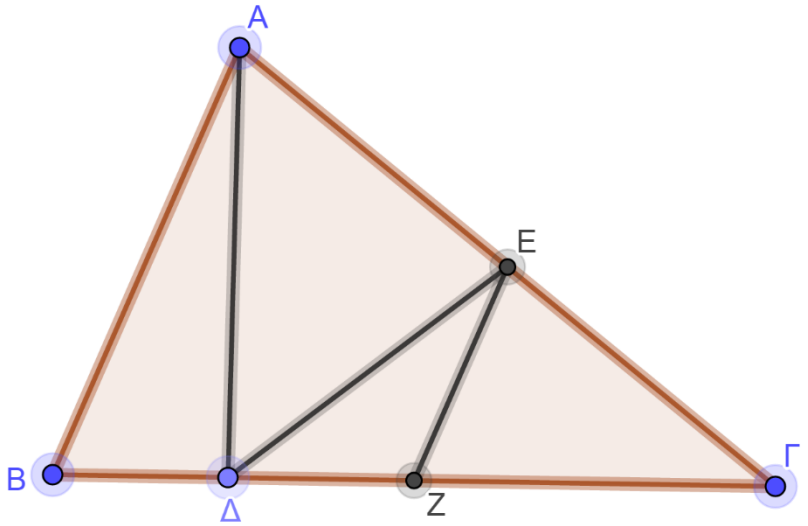


9. Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ, ονομάζουμε Ε και Ζ τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν Η και Κ οι προβολές των κορυφών Α και Γ στη διαγώνιο ΒΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΕΗ είναι κάθετη στην ΚΖ.



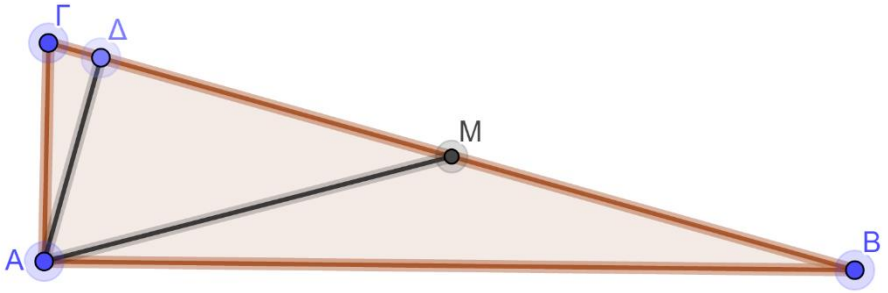
Σύνθετα θέματα

1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με Β>Γ, ονομάζω Ε μέσον ΑΓ , Ζ το μέσον της ΒΓ και φέρνω το ύψος ΑΔ. Να αποδείξετε ότι η γωνία ΔΕΖ=Β-Γ.

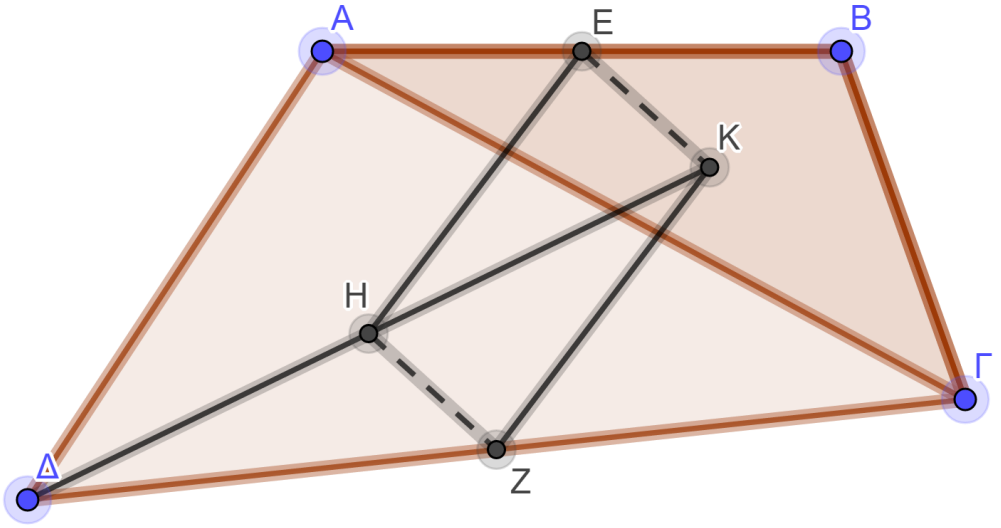


2. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, φέρνουμε το ύψος του ΑΔ. Να αποδείξετε την ισοδυναμία:

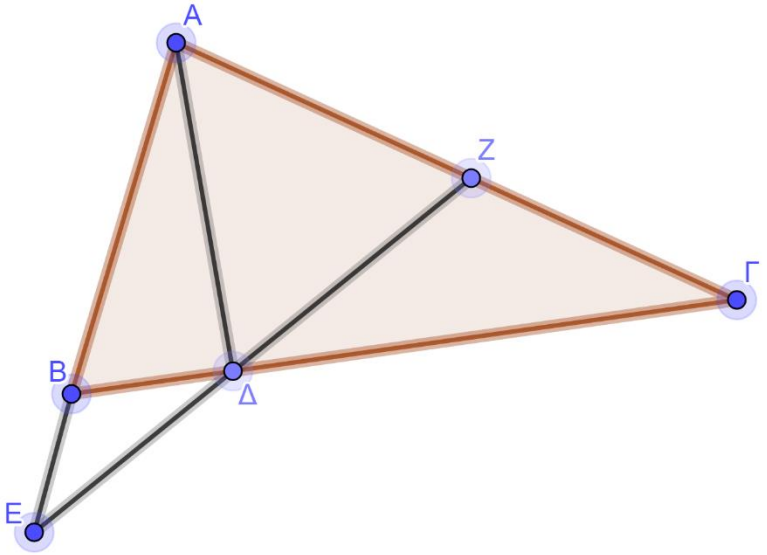
$$B = 15^\circ \Leftrightarrow A\Delta = \frac{B\Gamma}{4}$$



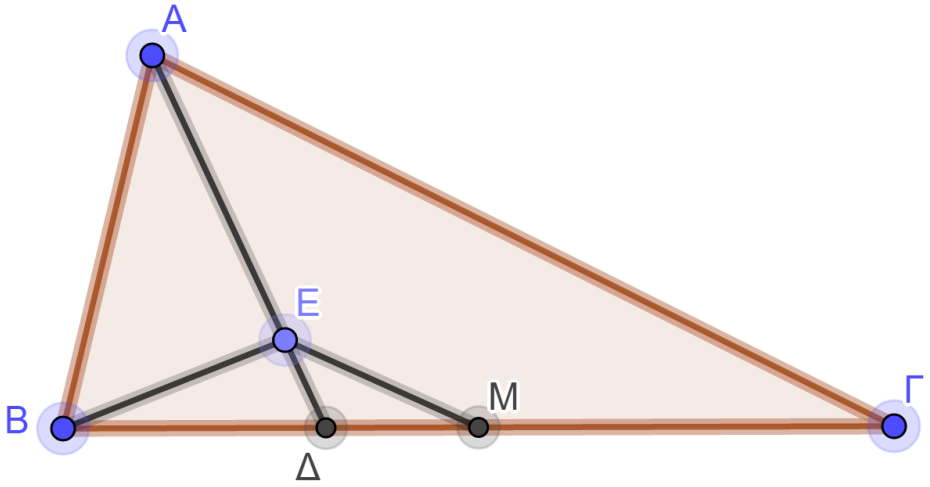
3. Σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ, θεωρούμε το βαρύκεντρο Κ του τριγώνου ΑΒΓ και τα μέσα Ε, Ζ και Η των ΑΒ, ΓΔ και ΚΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΕΗ//ΚΖ.



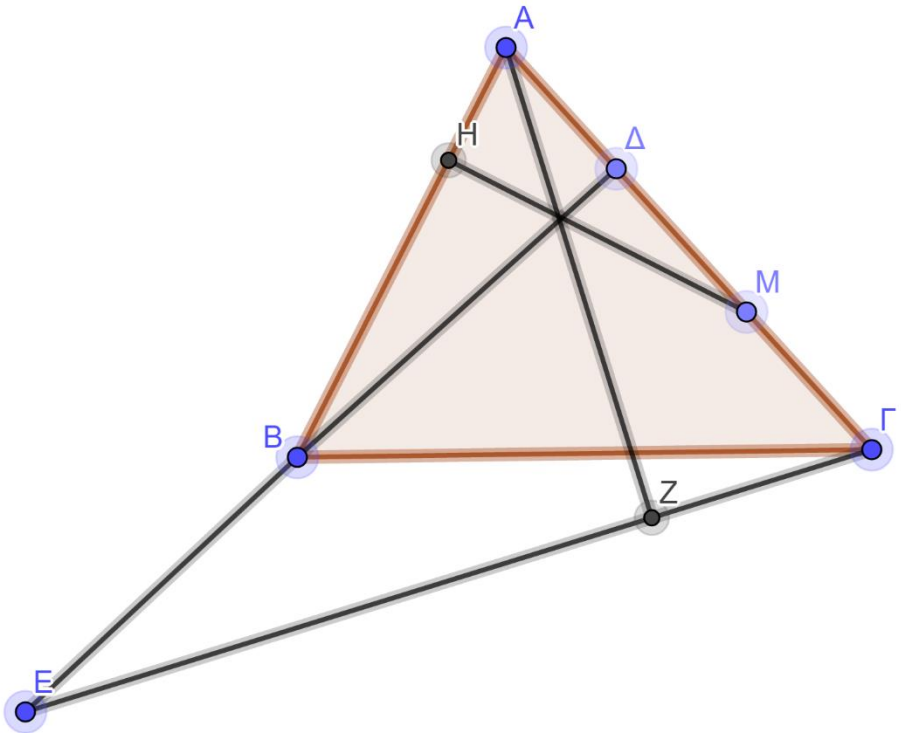
4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Β=2Γ<90° και το ύψος του ΑΔ. Προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ=ΒΔ. Να αποδείξετε ότι η ΔΕ διχοτομεί την πλευρά ΑΓ.



5. Σε τρίγωνο ΑΒΓ, φέρνουμε τη διχοτόμο ΑΔ και ονομάζουμε Μ το μέσον της ΒΓ. Αν Ε είναι η προβολή του Β στη διχοτόμο ΑΔ, να αποδείξετε ότι :
i. ΕΜ//ΑΓ ii. ΑΓ-ΑΒ=2ΕΜ και iii. Η γωνία ΔΕΜ είναι το μισό της γωνίας Α.

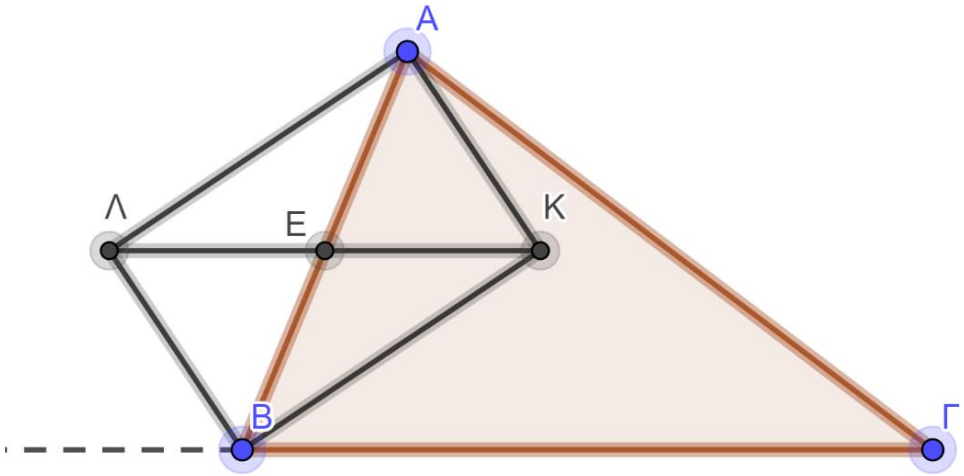
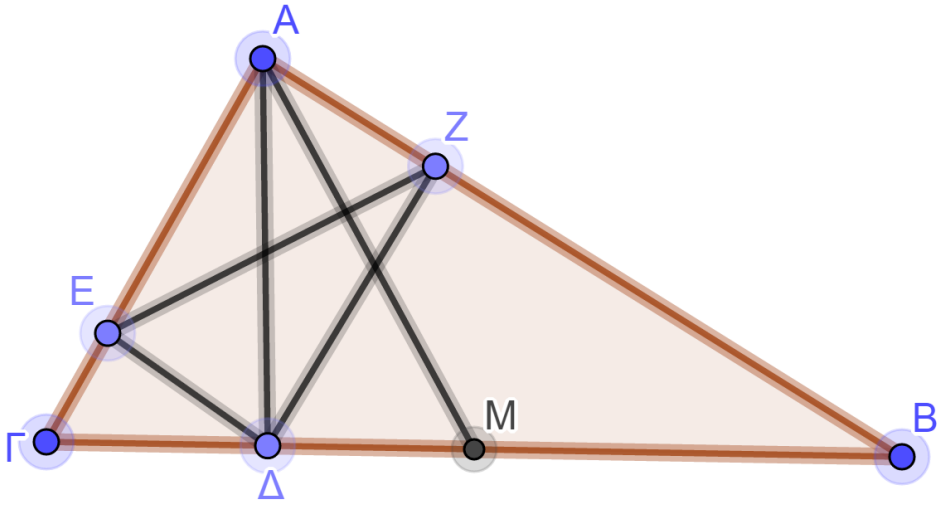


6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, το ύψος του ΒΔ και Μ το μέσον του τμήματος ΓΔ. Προεκτείνουμε τη ΔΒ κατά τμήμα ΒΕ=ΒΔ. Να αποδείξετε ότι η κάθετη από το Μ στην ΑΒ, η κάθετη από το Α στην ΕΓ και η ΒΔ συντρέχουν.



7. Αν Κ και Λ είναι οι προβολές της κορυφής Α τριγώνου ΑΒΓ στην εσωτερική και εξωτερική διχοτόμο της γωνίας Β αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

i. Το ΑΚΒΛ είναι ορθογώνιο. ii. Η ευθεία ΚΛ διέρχεται από το μέσον της ΑΓ.



8. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90°), φέρνουμε το ύψος ΑΔ και τη διάμεσό του ΑΜ. Αν Ε και Ζ οι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι: i. ΑΔ=ΕΖ ii. ΑΜ κάθετος στην ΕΖ iii. Η διάμεσος ΑΜ, το τμήμα ΔΖ και η παράλληλη προς την ΕΖ από το Β συντρέχουν.