<u>Λύσεις Ασκήσεων (Όρια)</u>

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-|x|}{|x^2-2x|}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|^2-|x|}{|x||x-2|}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|(|x|-1)}{|x||x-2|}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{|x|}(|x|-1)}{\cancel{|x|}|x-2|}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|-1}{|x-2|}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0-1}{|0-2|}=-\dfrac{1}{2}$

2. Επειδή κατά την αντικατάσταση μηδενίζονται τα απόλυτα , διακρίνουμε περιπτώσεις (θέτουμε το κλάσμα $f(x)$ για λόγους ευκολίας)

- $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|x^2-4|-x^2+2x}{|x^2-3x+2|}\overset{\substack{x^2-4\succ 0}}{\underset{x^2-3x+2\succ 0}{=}}\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-4-x^2+2x}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\cancel{x^2}-4-\cancel{x^2}+2x}{(x-1)(x-2)}$

$=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x-4}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2(x-2)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2\cancel{(x-2)}}{(x-1)\cancel{(x-2)}}=2$

- $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|x^2-4|-x^2+2x}{|x^2-3x+2|}\overset{\substack{x^2-4\prec 0}}{\underset{x^2-3x+2\prec 0}{=}}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-x^2+4-x^2+2x}{-(x^2-3x+2)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-2x^2+2x+4}{-(x-1)(x-2)}$

$=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-2(x^2-x-2)}{-(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-2\cancel{(x-2)}(x+1)}{-(x-1)\cancel{(x-2)}}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2(x+1)}{(x-1)}=6$. Λόγω του ότι

$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)$, **το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει** .

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+6}+\sqrt{x+8}-5x}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+6}-2x+\sqrt{x+8}-3x}{x^2-x}=L$

- $L_1=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+6}-2x}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt[3]{x^2+x+6}-2x\right)\left(\sqrt[3]{x^2+x+6}^{\,2}+2x\cdot\sqrt[3]{x^2+x+6}+4x^2\right)}{x(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2+x+6}^{\,2}+2x\cdot\sqrt[3]{x^2+x+6}+4x^2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+6}^{\,3}-8x^3}{x(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2+x+6}^{\,2}+2x\cdot\sqrt[3]{x^2+x+6}+4x^2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+6-8x^3}{x(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2+x+6}^{\,2}+2x\cdot\sqrt[3]{x^2+x+6}+4x^2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-8x^3+x^2+x+6}{x(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2+x+6}^{\,2}+2x\cdot\sqrt[3]{x^2+x+6}+4x^2\right)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}\left(-8x^2-7x-6\right)}{x\cancel{(x-1)}\left(\sqrt[3]{x^2+x+6}^{\,2}+2x\cdot\sqrt[3]{x^2+x+6}+4x^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\left(-8x^2-7x-6\right)}{x\left(\sqrt[3]{x^2+x+6}^{\,2}+2x\cdot\sqrt[3]{x^2+x+6}+4x^2\right)}=-\frac{21}{12}$$

- $$L_2=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+8}-3x}{x^2-x}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x+8}-3x\right)\left(\sqrt{x+8}+3x\right)}{\left(x^2-x\right)\left(\sqrt{x+8}+3x\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x+8-9x^2}{x(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3x\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-9x^2+x+8}{x(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3x\right)}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(-9x-8)}{x\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x+8}+3x\right)}=\lim_{x\to1}\frac{-9x-8}{x\left(\sqrt{x+8}+3x\right)}=-\frac{17}{6},$$

οπότε $L=L_1+L_2=-\frac{21}{12}-\frac{17}{6}\Leftrightarrow L=-\frac{55}{12}$

4. $$\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{x+7}}{\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to2^+}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{x+7}\right)\left(\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x+7}\right)\left(\sqrt{x-2}\right)}{\left(\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x+7}\right)}$$

$$=\lim_{x\to2^+}\frac{\left(x^2+x+3-x-7\right)\left(\sqrt{x-2}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x+7}\right)}=\lim_{x\to2^+}\frac{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{x-2}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x+7}\right)}$$

$$=\lim_{x\to2^+}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)\left(\sqrt{x-2}\right)}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x+7}\right)}=\lim_{x\to2^+}\frac{(x+2)\left(\sqrt{x-2}\right)}{\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x+7}}=0$$

5. $$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt[3]{x+6}-\sqrt{x-1}-1}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt[3]{x+6}-2-\sqrt{x-1}+1}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt[3]{x+6}-2-\left(\sqrt{x-1}-1\right)}=$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{x-2}}}{\frac{\sqrt[3]{x+6}-2-\left(\sqrt{x-1}-1\right)}{x-2}}=\lim_{x\to2}\frac{1}{\frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x-2}-\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}}==l$$

. Υπολογίζουμε τα όρια του παρονομαστή ξεχωριστά :

✓ $$l_1=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt[3]{x+6}-2\right)\left(\sqrt[3]{x+6}^{\,2}+2\cdot\sqrt[3]{x+6}+2^2\right)}{(x-2)\left(\sqrt[3]{x+6}^{\,2}+2\sqrt[3]{x+6}+2^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x+6-8}{(x-2)\left(\sqrt[3]{x+6}^{\,2}+2\sqrt[3]{x+6}+4\right)}=\lim_{x\to2}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt[3]{x+6}^{\,2}+2\sqrt[3]{x+6}+4\right)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt[3]{x+6}^{\,2}+2\sqrt[3]{x+6}+4}=\frac{1}{12}$$

✓ $l_2=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-1-1}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}=\dfrac{1}{2}$, οπότε $l=\dfrac{1}{l_1-l_2}=\dfrac{1}{\frac{1}{12}-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\frac{1}{12}-\frac{6}{12}}$

$=\dfrac{1}{-\frac{5}{12}}\Leftrightarrow l=-\dfrac{12}{5}$

6. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt[3]{x+5}-\sqrt{x+1}}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt[3]{x+5}-2-\sqrt{x+1}+2}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt[3]{x+5}-2-\left(\sqrt{x+1}-2\right)}{x-3}=$

$=\lim\limits_{x\to3}\left[\dfrac{\sqrt[3]{x+5}-2}{x-3}-\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\right]=L$

✓ $L_1=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt[3]{x+5}-2}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\left(\sqrt[3]{x+5}-2\right)\left(\sqrt[3]{(x+5)^2}+2\sqrt[3]{x+5}+2^2\right)}{(x-3)\left(\sqrt[3]{(x+5)^2}+2\sqrt[3]{x+5}+2^2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt[3]{x+5}^3-8}{(x-3)\left(\sqrt[3]{(x+5)^2}+2\sqrt[3]{x+5}+2^2\right)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+5-8}{(x-3)\left(\sqrt[3]{(x+5)^2}+2\sqrt[3]{x+5}+2^2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}\left(\sqrt[3]{(x+5)^2}+2\sqrt[3]{x+5}+2^2\right)}=\dfrac{1}{12}$

✓ $L_2=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\dfrac{1}{4}$, άρα $L=L_1-L_2=\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}-\dfrac{3}{12}=-\dfrac{2}{12}=-\dfrac{1}{6}$

7. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{x\sqrt{x}-\sqrt{x}-6}\ \underset{u\to2}{\overset{\substack{\sqrt{x}=u\\ x=u^2}}{=}}\ \lim\limits_{u\to2}\dfrac{u^2-4}{u^2\cdot u-u-6}=\lim\limits_{u\to2}\dfrac{u^2-4}{u^3-u-6}=\lim\limits_{u\to2}\dfrac{\cancel{(u-2)}(u+2)}{\cancel{(u-2)}(u^2+2u+3)}$

$=\lim\limits_{u\to2}\dfrac{u+2}{u^2+2u+3}=\dfrac{4}{11}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\left(1-2\eta\mu^2x\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\eta\mu^2x}{x^2}=2\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2=2\cdot1=2$

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu(\varepsilon\varphi x)}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu(\varepsilon\varphi x)}{\varepsilon\varphi x}\cdot\dfrac{\varepsilon\varphi x}{\eta\mu x}=L$

- $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(\varepsilon\varphi x)}{\varepsilon\varphi x}\overset{\varepsilon\varphi x=u}{\underset{u\to 0}{=}}\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$ και
- $\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi x}{\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\varepsilon\varphi x}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}}=1$, συνεπώς $L=1\cdot 1\Leftrightarrow L=1$

10. $\lim_{x\to 2}\frac{\eta\mu(x^2-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\eta\mu(x^2-4)}{x^2-4}\cdot\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\eta\mu(x^2-4)}{x^2-4}\cdot(x+2)=L$

- ✓ $\lim_{x\to 2}\frac{\eta\mu(x^2-4)}{x^2-4}\overset{x^2-4=u}{\underset{u\to 0}{=}}\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$ και
- ✓ $\lim_{x\to 2}(x+2)=4$, άρα $L=1\cdot 4\Leftrightarrow L=4$

11. $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{x}\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)=4$

γιατί :

- ➢ $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{x}\overset{2x=u}{\underset{u\to 0}{=}}\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{\frac{u}{2}}=2\cdot\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=2$ και $\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x+1}+1\right)=2$

12. $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x-1)+2x^3}{x^4+x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x\left(1-2\eta\mu^2\frac{x}{2}-1\right)+2x^3}{x^4+x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\eta\mu x\cdot\eta\mu^2\frac{x}{2}+2x^3}{x^4+x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cancel{x^3}\left(\frac{\eta\mu x\cdot\eta\mu^2\frac{x}{2}}{x^3}-1\right)}{\cancel{x^3}(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\left(\frac{\eta\mu x\cdot\eta\mu^2\frac{x}{2}}{x^3}-1\right)}{x+1}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{\cdot\eta\mu^2\frac{x}{2}}{x^2}-1\right)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{\cdot\eta\mu^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{4}-1\right)}{x+1}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\left(\frac{\eta\mu\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{4}-1\right)}{x+1}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\left(1\cdot 1^2\cdot\frac{1}{4}-1\right)}{0+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\left(\frac{1}{4}-1\right)}{1}=\frac{3}{2}$$

13. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\eta\mu x+4}-\sqrt{\sigma\upsilon\nu x+3}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{\eta\mu x+4}-\sqrt{\sigma\upsilon\nu x+3}\right)\left(\sqrt{\eta\mu x+4}+\sqrt{\sigma\upsilon\nu x+3}\right)}{x\left(\sqrt{\eta\mu x+4}+\sqrt{\sigma\upsilon\nu x+3}\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x+4-\sigma\upsilon\nu x-3}{x\left(\sqrt{\eta\mu x+4}+\sqrt{\sigma\upsilon\nu x+3}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x+1}{x\left(\sqrt{\eta\mu x+4}+\sqrt{\sigma\upsilon\nu x+3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\eta\mu x}{x}-\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}}{\frac{x}{x}\left(\sqrt{\eta\mu x+4}+\sqrt{\sigma\upsilon\nu x+3}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\eta\mu x}{x}-\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}}{\sqrt{\eta\mu x+4}+\sqrt{\sigma\upsilon\nu x+3}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{\eta\mu x+4}+\sqrt{\sigma\upsilon\nu x+3}}\cdot\left(\frac{\eta\mu x}{x}-\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=L$$

- ❖ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{\eta\mu x+4}+\sqrt{\sigma\upsilon\nu x+3}}=\frac{1}{4}$
- ❖ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$
- ❖ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$, επομένως $L=\frac{1}{4}\cdot(1-0)\Leftrightarrow L=\frac{1}{4}$

14. Θέτουμε $g(x)=\frac{f(x)-1}{x^2-4}\Leftrightarrow f(x)-1=g(x)\cdot\left(x^2-4\right)\Leftrightarrow f(x)=g(x)\cdot\left(x^2-4\right)+1$, οπότε :

a. $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left[g(x)\cdot\left(x^2-4\right)+1\right]=1$

b. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)+x-3}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{g(x)\cdot\left(x^2-4\right)+1+x-3}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{g(x)\cdot(x-2)(x+2)+x-2}{x(x-2)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}\left(g(x)(x+2)+1\right)}{x\cancel{(x-2)}}=\frac{5(2+2)+1}{2}=\frac{21}{2}$

c. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{xf(x)-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x\left[g(x)\left(x^2-4\right)+1\right]-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{xg(x)\left(x^2-4\right)+x-2}{(x-2)(x+2)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{xg(x)(x-2)(x+2)+x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}\left[xg(x)(x+2)+1\right]}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{xg(x)(x+2)+1}{(x+2)}$

$=\frac{2\cdot 5\cdot(2+2)+1}{2+2}=\frac{41}{2}$

d. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{4f(x)-x^2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{4\left[g(x)\left(x^2-4\right)+1\right]-x^2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{4g(x)\left(x^2-4\right)+4-x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{4g(x)\left(x^2-4\right)-\left(x^2-4\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\cancel{x^2-4}}{(4g(x)-1)\cancel{\left(x^2-4\right)}}=\frac{1}{19}$

15. α) ισχύει : $f^2(x)+6x\le 2xf(x)+9\Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)\le -6x+9$

$\Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2\le x^2-6x+9\Leftrightarrow\left(f(x)-x\right)^2\le(x-3)^2\Leftrightarrow\left|f(x)-x\right|\le|x-3|$, η τελευταία σχέση από ιδιότητες απολύτων γίνεται : $-|x-3|\le f(x)-x\le|x-3|$ (1), απ' όπου με χρήση ορίων παίρνουμε : $\lim\limits_{x\to 3}\left(-|x-3|\right)=\lim\limits_{x\to 3}|x-3|=0$, επομένως από Κριτήριο Παρεμβολής θα έχουμε $\lim\limits_{x\to 3}\left[f(x)-x\right]=0$.

Αν επεξαργαστούμε τα σχέση (1) θα πάρουμε : $-|x-3|+x\le f(x)\le|x-3|+x$. Από την τελευταία σχέση και πάλι με χρήση του Κριτηρίου Παρεμβολής προκύπτει ότι : $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=3$.

β) Ισχύει : $x^2-3x+2\le f(x)(x-2)\le 2x^2-7x+6$ Στην περίπτωση αυτή θέλουμε να κατασκευάσουμε διπλή ανισότητα η οποία στο μεσαίο μέλος να έχει μόνο τη συνάρτηση της οποίας θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο . Επειδή θα διαιρέσουμε να μέλη της ανίσωσης με $x-2$, διακρίνουμε περιπτώσεις :

- Αν $x-2\succ 0$, δηλαδή $x\succ 2$, τότε : $\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}\le\dfrac{f(x)(x-2)}{x-2}\le\dfrac{2x^2-7x+6}{x-2}$

  $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}==\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x-1)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=1$ και

  $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x^2-7x+6}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\cancel{(x-2)}(2x-3)}{\cancel{x-2}}=1$, συνεπώς από Κριτήριο Παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=1$

- $x-2\prec 0$, δηλαδή αν $x\prec 2$, τότε : $\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}\ge\dfrac{f(x)(x-2)}{x-2}\ge\dfrac{2x^2-7x+6}{x-2}$ και με την ίδια διαδικασία όπως παραπάνω και παίρνοντας όριο στο 2^-, θα προκύψει ότι $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=1$. Με βάση τα παραπάνω και επειδή $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)$, το όριο της f υπάρχει και ισχύει : $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=1$

16.α) Είναι η περίπτωση ορίου στην οποία εμφανίζονται ριζικά διαφορετικών τάξεων αλλά με την ίδια υπόρριζη ποσότητα. Για την επίλυση βρίσκουμε αρχικά το ΕΚΠ των αριθμών 2,3 και 4 που είναι το 12. Άρα θέτουμε : $\sqrt[12]{x-1}=u$, οπότε αν $x\to 2$, τότε $u\to 1$ και το όριο γίνεται :

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-1}-2}{\sqrt[4]{x-1}-1}=\lim_{u\to 1}\frac{u^6+u^4-2}{u^3-1}=\lim_{u\to 1}\frac{\cancel{(u-1)}(u^5+u^4+2u^3+2u^2+2u+2)}{\cancel{(u-1)}(u^2+u+1)}$$

$$=\lim_{u\to 1}\frac{u^5+u^4+2u^3+2u^2+2u+2}{u^2+u+1}=\frac{10}{3}$$

β) για τον πιο εύκολο υπολογισμό του συγκεκριμένου ορίου θέτουμε $x^2+x=u$, οπότε αν $x\to 0$, τότε $u\to 0$ και το δοθέν όριο γίνεται : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+9}+\sqrt{x^2+x+4}-5}{\sqrt{x^2+x+1}-1}$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{\sqrt{u+9}+\sqrt{u+4}-5}{\sqrt{u+1}-1}=\lim_{u\to 0}\frac{\sqrt{u+9}-3+\sqrt{u+4}-2}{\sqrt{u+1}-1}=\lim_{u\to 0}\left[\frac{\sqrt{u+9}-3}{\sqrt{u+1}-1}+\frac{\sqrt{u+4}-2}{\sqrt{u+1}-1}\right]=L$$

- $L_1=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sqrt{u+9}-3}{\sqrt{u+1}-1}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{(\sqrt{u+9}-3)(\sqrt{u+9}+3)(\sqrt{u+1}+1)}{(\sqrt{u+1}-1)(\sqrt{u+1}+1)(\sqrt{u+9}+3)}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{(u+9-9)(\sqrt{u+1}+1)}{(u+1-1)(\sqrt{u+9}+3)}$

  $=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\cancel{u}(\sqrt{u+1}+1)}{\cancel{u}(\sqrt{u+9}+3)}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sqrt{u+1}+1}{\sqrt{u+9}+3}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

❖ $L_2=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sqrt{u+4}-2}{\sqrt{u+1}-1}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{u+4}-2\right)\left(\sqrt{u+4}+2\right)\left(\sqrt{u+1}+1\right)}{\left(\sqrt{u+1}-1\right)\left(\sqrt{u+1}+1\right)\left(\sqrt{u+4}+2\right)}$

$=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{(u+4-4)\left(\sqrt{u+1}+1\right)}{(u+1-1)\left(\sqrt{u+4}+2\right)}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\cancel{u}\left(\sqrt{u+1}+1\right)}{\cancel{u}\left(\sqrt{u+4}+2\right)}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$, άρα $L=L_1+L_2$

$=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow L=\dfrac{5}{6}$

17.α) Περίπτωση ορίου << μηδενική επί φραγμένη>>

$\left|(x-3)^2\cdot \eta\mu\dfrac{2}{x-3}\right|=\left|(x-3)^2\right|\cdot\left|\eta\mu\dfrac{2}{x-3}\right|\le (x-3)^2$ και από ιδιότητες απολύτων έχουμε :

$-(x-3)^2\le (x-3)^2\cdot\eta\mu\dfrac{2}{x-3}\le (x-3)^2$ απ'όπου με Κριτήριο Παρεμβολής και επειδή

$\lim\limits_{x\to 3}\left[-(x-3)^2\right]=\lim\limits_{x\to 3}(x-3)^2=0$, παίρνουμε $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)^2\cdot\eta\mu\dfrac{2}{x-3}=0$

β) ίδια ακριβώς περίπτωση με αυτήν του α' ερωτήματος . Και σε αυτή το ζητούμενο όριο ισούται με 0

18.Θέτουμε : $h(x)=\dfrac{f(x)+1}{x}\Leftrightarrow f(x)=h(x)\cdot x-1$ (1) και $\varphi(x)=\dfrac{g(x)-2}{x}$

$\Leftrightarrow g(x)=\varphi(x)\cdot x+2$ (2)

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)g(x)+\sqrt{x+4}}{x^2+x}\overset{(1)}{\underset{(2)}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(h(x)x-1)(\varphi(x)x+2)+\sqrt{x+4}}{x(x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h(x)\varphi(x)x^2+2h(x)x-\varphi(x)x-2+\sqrt{x+4}}{x(x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h(x)\varphi(x)x^2+x\left(2h(x)-\varphi(x)\right)+\sqrt{x+4}-2}{x(x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{h(x)\varphi(x)x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}(x+1)}+\dfrac{\cancel{x}\left(2h(x)-\varphi(x)\right)}{\cancel{x}(x+1)}+\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x(x+1)}\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{h(x)\varphi(x)x}{x+1}+\dfrac{2h(x)-\varphi(x)}{x+1}+\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x(x+1)}\right]=L$

- $L_1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h(x)\varphi(x)x}{x+1}=0$
- $L_2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2h(x)-\varphi(x)}{x+1}=\dfrac{2\cdot 2-(-3)}{0+1}=7$
- $L_3=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x(x+1)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+4-4}{x(x+1)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x+1)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\dfrac{1}{4}$

Άρα $L = L_1 + L_2 + L_3 \; = 7 + \frac{1}{4} \Leftrightarrow L = \frac{29}{4}$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu\left(2f(x)+g(x)\right)}{x} \; = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu\left(2f(x)+g(x)\right)}{2f(x)+g(x)}\cdot\frac{2f(x)+g(x)}{x} \; = l$. Υπολογίζουμε τα δυο

όρια ξεχωριστά :

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu\left(2f(x)+g(x)\right)}{2f(x)+g(x)}$ (1) . Θέτουμε $u = 2f(x)+g(x)$,

  $\lim\limits_{x\to 0}\left(2f(x)+g(x)\right) = 2\cdot(-1)+2 = 0$, οπότε το όριο (1) γίνεται : $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u} = 1$

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2f(x)+g(x)}{x} \overset{(\alpha)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\left(h(x)x-1\right)+x\varphi(x)+2}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2h(x)x\cancel{-2}+x\varphi(x)\cancel{+2}}{x}$

  $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\left(2h(x)+\varphi(x)\right)}{\cancel{x}} \; = \lim\limits_{x\to 0}\left(2h(x)+\varphi(x)\right) \; = 2\cdot 2-3 = 1$, άρα το αρχικό ζητούμενο όριο

  γίνεται : $l = 1\cdot 1 \Leftrightarrow l = 1$

19. Θέτουμε τη δοθείσα σχέση ως εξής : $g(x) = \frac{f(x)-x}{\sqrt{x^2+3}-2} \Leftrightarrow f(x)-x = g(x)\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)$

$\Leftrightarrow f(x) = g(x)\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)+x$, (1) με $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left[g(x)\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)+x\right] = 1$, **(2)**

α) το ζητούμενο όριο $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)+2x-3}{|x-2|-1}$, λόγω της (1) γίνεται :

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)+x+2x-3}{|x-2|-1} \; = \lim_{x\to 1}\frac{g(x)\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)+3x-3}{|x-2|-1}$$

$$\underset{\kappa o\nu\tau\alpha\ \sigma\tau o\, 1}{\overset{x-2\prec 0}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{g(x)\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)+3x-3}{-x+2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{g(x)\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)+3(x-1)}{-(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{g(x)\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{-(x-1)}+\frac{3(x-1)}{-(x-1)}\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{g(x)\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{-(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}-3\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{g(x)\left(x^2+3-4\right)}{-(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}\right]-3 \; = \lim_{x\to 1}\left[\frac{g(x)\cancel{(x-1)}(x+1)}{-\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}\right]-3 \; = \lim_{x\to 1}\left[-\frac{g(x)(x+1)}{\sqrt{x^2+3}+2}\right]-3$$

$$= -\frac{5\cdot 2}{4}-3 \; = -\frac{10}{4}-3 \; = -\frac{11}{2}$$

β) Πρώτα βγάζουμε τις παραστάσεις από τα απόλυτα : Επειδή

$$\lim_{x\to1}\left(x^2 f(x)-3\right) \overset{(2)}{=} 2-3=-1\prec 0 \text{ και } \lim_{x\to1}\left(2-f(x)\right)=2-1=1\succ 0$$ το ζητούμενο όριο γράφεται :

$$\lim_{x\to1}\frac{-x^2 f(x)+3-\left(2-f(x)\right)-\sqrt{x}}{x(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-x^2 f(x)+3-2+f(x)-\sqrt{x}}{x(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{-x^2 f(x)+1+f(x)-\sqrt{x}}{x(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)\left(1-x^2\right)+1-\sqrt{x}}{x(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{f(x)(1+x)\cancel{(1-x)}}{x\cancel{(x-1)}}+\frac{1-\sqrt{x}}{x(x-1)}\right]=\lim_{x\to1}\left[-\frac{f(x)(1+x)}{x}+\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{x(x-1)\left(1+\sqrt{x}\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to1}\left[-\frac{f(x)(1+x)}{x}+\frac{\cancel{1-x}}{x\cancel{(x-1)}\left(1+\sqrt{x}\right)}\right]=\lim_{x\to1}\left[-\frac{f(x)(1+x)}{x}-\frac{1}{x\left(1+\sqrt{x}\right)}\right]=-\frac{1\cdot2}{1}-\frac{1}{1\cdot2}=-\frac{5}{2}$$

20. α) $$\lim_{x\to4}\frac{2x-1}{\sqrt{x+5}-3}=\lim_{x\to4}\frac{(2x-1)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}{\left(\sqrt{x+5}-3\right)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}=\lim_{x\to4}\frac{(2x-1)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}{x-4}$$

$=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{1}{x-4}(2x-1)\left(\sqrt{x+5}+3\right)$, άρα έχουμε την περίπτωση $\frac{1}{0}$. Στο συγκεκριμένο ζητούμενο όριο διακρίνουμε περιπτώσεις : (το όριο $\lim\limits_{x\to4}(2x-1)\left(\sqrt{x+5}+3\right)$ υπολογίζεται εύκολα και ισούται με 42

- ✓ Αν $x\prec4$, τότε $\lim\limits_{x\to4^-}\dfrac{1}{x-4}=-\infty$ και το αρχικό όριο γίνεται $(-\infty)\cdot42=-\infty$
- ✓ Αν $x\succ4$, τότε $\lim\limits_{x\to4^+}\dfrac{1}{x-4}=+\infty$ και το ζητούμενο όριο ισούται με $+\infty$. Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι το όριο δεν υπάρχει .

β) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+1}{x-\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x-\eta\mu x}(x+1)$ (περίπτωση ορίου $\frac{1}{0}$) διακρίνουμε περιπτώσεις :

- ❖ Αν $x\succ0$, τότε $x-\eta\mu x\succ0$ συνεπώς $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x-\eta\mu x}=+\infty$ και το ζητούμενο όριο ισούται με $+\infty$
- ❖ Αν $x\prec0$ τότε $x-\eta\mu x\prec0$ οπότε $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x-\eta\mu x}=-\infty$, άρα καταλήγουμε στο ότι το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει .

γ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2x-5}{\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}(2x-5)$ (ίδια περίπτωση με τις παραπάνω)

- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}=+\infty$ αφού $\sigma\upsilon\nu x\succ 0$ κοντά $\frac{\pi}{2}^-$, άρα $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x-5}{\sigma\upsilon\nu x}$ $=(+\infty)(\pi-5)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}=-\infty$ αφού $\sigma\upsilon\nu x\prec 0$ κοντά στο $\frac{\pi}{2}^+$,άρα $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x-5}{\sigma\upsilon\nu x}$ $=(-\infty)(\pi-5)=+\infty$, άρα το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει .

21. α) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-3}{x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-3}{\sqrt{x}(x-4)-2(x-4)}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-3}{\left(\sqrt{x}-2\right)(x-4)}$

$=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x-3)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x-3)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)^2}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{1}{(x-4)^2}(x-3)\left(\sqrt{x}+2\right)=$

$=+\infty(4-3)(2+2)=+\infty$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-1}{x\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x\eta\mu x}(2x-1)=l$

✓ $\lim\limits_{x\to 0}(2x-1)=-1$

✓ $\lim\limits_{x\to 0}x\eta\mu x=0$, όμως κοντά στο 0, θα είναι $x\eta\mu x\succ 0$ (αν $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, τότε $x\succ 0$ και $\eta\mu x\succ 0$ συνεπώς $x\eta\mu x\succ 0$, ομοίως αν $x\in\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, τότε $x\prec 0$ και $\eta\mu x\prec 0$, άρα $x\eta\mu x\succ 0$). Τέλος $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x\eta\mu x}=+\infty$, άρα το όριο γίνεται ίσο με $l=+\infty(-1)\Leftrightarrow l=-\infty$

γ) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-3}{1-\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1-\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)}(x-3)=l$

Είναι : $\lim\limits_{x\to 1}(x-3)=-2$ και $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1-\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=+\infty$ γιατί : $\lim\limits_{x\to 1}\left[1-\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]=0$ όμως $1-\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)\succ 0$ κοντά στο 1, άρα $l=+\infty\cdot(-2)\Leftrightarrow l=-\infty$

22. α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1}{\sigma\upsilon\nu x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x-1}(x+1)$, ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}(\sigma\upsilon\nu x-1)=0$, όμως $\sigma\upsilon\nu x-1\prec 0$ κοντά στο 0, επομένως $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x-1}=-\infty$ και το αρχικά ζητούμενο όριο γίνεται ίσο με $-\infty\cdot(0+1)=-\infty$

β) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\eta\mu(x-2)}{(x-2)^3}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}\cdot\frac{\eta\mu(x-2)}{(x-2)}=L$

✓ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\eta\mu(x-2)}{(x-2)} \overset{\substack{x-2=u\\ }}{\underset{u\to 0}{=}} \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$ και

✓ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2=0$ και $(x-2)^2\succ 0$ κοντά στο 0 . Άρα το όριο ισούται με $L=+\infty\cdot 1 \Leftrightarrow L=+\infty$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2 3x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2 3x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu 3x}{x}\right)^2\cdot\dfrac{1}{x^2}=L$

✓ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu 3x}{x}\right)^2 \overset{3x=u}{\underset{u\to 0}{=}} =\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu u}{\frac{u}{3}}\right)^2=\lim\limits_{u\to 0}\left(3\cdot\dfrac{\eta\mu u}{u}\right)^2=9$ και

✓ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$, άρα $L=9\cdot(+\infty)\Leftrightarrow L=+\infty$

23. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+3h)-f(2-2h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+3h)-3+3-f(2-2h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(2+3h)-3}{h}+\dfrac{3-f(2-2h)}{h}\right]=L$ και υπολογίζουμε τα δυο όρια ξεχωριστά

❖ $L_1=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+3h)-3}{h} \overset{\substack{2+3h=u\\ h=\frac{u-2}{3}}}{\underset{u\to 2}{=}} \lim\limits_{u\to 2}\dfrac{f(u)-3}{\frac{u-2}{3}}=3\lim\limits_{u\to 2}\dfrac{f(u)-3}{u-2}=3\cdot 5=15$ λόγω υπόθεσης

❖ $L_2=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3-f(2-2h)}{h} \overset{\substack{2-2h=y\\ h=\frac{2-y}{2}}}{\underset{y\to 0}{=}} \lim\limits_{y\to 2}\dfrac{3-f(y)}{\frac{2-y}{2}}=2\lim\limits_{y\to 2}\dfrac{3-f(y)}{2-y}=2\cdot 5=10$ πάλι λόγω υπόθεσης, επομένως $L=L_1+L_2=15+10\Leftrightarrow L=25$

24. Θέτουμε $f(x)=\dfrac{\alpha x^2+\beta x-2}{x-2}\Leftrightarrow f(x)(x-2)=\alpha x^2+\beta x-2$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2}f(x)(x-2)=\lim\limits_{x\to 2}(\alpha x^2+\beta x-2)\Leftrightarrow 0=4\alpha+2\beta-2\Leftrightarrow 2\alpha+\beta-1=0\Leftrightarrow \beta=1-2\alpha$

(1) . Επιστρέφουμε στο αρχικό όριο και έχουμε : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\alpha x^2+\beta x-2}{x-2}\overset{(1)}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\alpha x^2+(1-2\alpha)x-2}{x-2}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\alpha x^2+x-2\alpha x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\alpha x(x-2)+x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(\alpha x+1)}{\cancel{x-2}}=2\alpha+1$$

. Από εκφώνηση γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$, συνεπώς $2\alpha+1=3 \Leftrightarrow \alpha=1$ και λόγω της (1) , $\beta=-1$

25. Θέτουμε $xf(x)=g(x)$, οπότε $f(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ (1)

α) $$\lim_{x\to 0}\left(\eta\mu^2 2x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\cdot f(x)\right)\overset{(1)}{=}=\lim_{x\to 0}\left(\eta\mu^2 2x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\cdot\frac{g(x)}{x}\right)==\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu^2 2x}{x^2}\cdot x\eta\mu\frac{1}{x}\cdot g(x)\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\eta\mu 2x}{x}\right)^2\cdot x\eta\mu\frac{1}{x}\cdot g(x)\right]=L$$

. Υπολογίζουμε τα τρία αυτά όρια ξεχωριστά

- $L_1=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu 2x}{x}\right)^2 \underset{u\to 0}{\overset{2x=u}{=}} =2^2=4$
- $L_2=\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=0$ (Περίπτωση Μηδενική επί φραγμένη και Κριτήριο Παρεμβολής)
- $L_3=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=4$, οπότε $L=L_1\cdot L_2\cdot L_3=4\cdot 0\cdot 4 \Leftrightarrow L=0$

β) $$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x+4}-2\right)f(x)\overset{(1)}{=}\left(\sqrt{x+4}-2\right)\cdot\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\right)\cdot g(x)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}\right]\cdot g(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x+\cancel{4}-\cancel{4}}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}\right]\cdot g(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{x+4}+2\right)}\right]\cdot g(x)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 4=1$$

γ) $$\lim_{x\to 0}(\eta\mu x-\varepsilon\varphi x)f(x)\overset{(1)}{=}=\lim_{x\to 0}(\eta\mu x-\varepsilon\varphi x)\cdot\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x-\varepsilon\varphi x}{x}\cdot g(x)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}-\frac{\varepsilon\varphi x}{x}\right)\cdot g(x)=(1-1)\cdot 4=0$$

26. α) Από την εκφώνηση : $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)}{h}=3 \overset{2+h=u}{\underset{u\to 2}{\Leftrightarrow}} \lim_{h\to 0}\frac{f(u)}{u-2}=3$. Λόγω της (1) θεωρούμε

συνάρτηση $g(u)=\frac{f(u)}{u-2} \Leftrightarrow f(u)=g(u)(u-2)$, οπότε $\lim_{u\to 2} f(u)=\lim_{u\to 2} g(u)(u-2)$

$\Leftrightarrow \lim_{u\to 2} f(u)=0$, επομένως $\lim_{x\to 2} f(x)=0$ (2)

β) $\lim_{x\to 2}\frac{|f^2(x)-3|+f(x)-3}{f^2(x)+f(x)}$, είναι : $f^2(x)-3\prec 0$ κοντά στο 2 αφού $\lim_{x\to 2}(f^2(x)-3)=-3$ λόγω της (2), επομένως το αρχικό όριο γίνεται : $\lim_{x\to 2}\frac{-f^2(x)+3+f(x)-3}{f^2(x)+f(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{f(x)}(1-f(x))}{\cancel{f(x)}(1+f(x))}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{1-f(x)}{1+f(x)} \overset{(2)}{=} 1$

γ) $\lim_{x\to 2}\frac{\eta\mu 2f(x)-3\varphi 3f(x)}{\eta\mu 4f(x)-\varepsilon\varphi 5f(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{\eta\mu 2f(x)-3\varphi 3f(x)}{f(x)}}{\frac{\eta\mu 4f(x)-\varepsilon\varphi 5f(x)}{f(x)}}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{\eta\mu 2f(x)}{f(x)}-\frac{\varepsilon\varphi 3f(x)}{f(x)}}{\frac{\eta\mu 4f(x)}{f(x)}-\frac{\varepsilon\varphi 5f(x)}{f(x)}}=\frac{2-3}{4-5}=1$,

γιατί : $\lim_{x\to 2}\frac{\eta\mu 2f(x)}{f(x)} \overset{2f(x)=u}{\underset{u\to 0}{=}} \lim_{u\to 0} 2\frac{\eta\mu u}{u}=2$, ομοίως υπολογίζονται όλα τα όρια του αριθμητή και του παρονομαστή

27. α) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-5x+7}{5x^3+4x^2-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{5x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cancel{x^3}}{5\cancel{x^3}}=\frac{2}{5}$

β) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-x+7}{5x^3+2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{5x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3\cancel{x^2}}{5x\cancel{^3}^{1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{5x}=0$

γ) $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^4-3x^2+2x+7}{2x^2+x-5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^4}{2x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^{\cancel{4}\,2}}{2\cancel{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{2}x^2=+\infty$

28. α) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{4x^2-3x+5}}{3x-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{x^2\left(4-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}}{3x-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+x\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}}{3x-5}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(2+\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}\right)}{3\cancel{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}}{3}=\frac{4}{3}$ αφού $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x^2}=0$

β) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-5x+3}+2x}{2x+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x\left(1-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}+2x}{2x+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}+2x}{2x+1}$

$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}+2x}{2x+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}-2\right)}{2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}\left(\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}-2\right)}{2\cancel{x}}$

$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}-2}{2} = -\frac{1}{2}$

γ) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+1}+2x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+2x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+2x\right)$

$x \prec 0$

$= \lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+2x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-x\left(\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-2\right)\right) = (+\infty)\cdot(2-2)$

Απροσδιοριστία , συνεπώς επιστρέφουμε στο αρχικό όριο και κάνουμε συζυγή παράσταση:

$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+1}+2x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+3x+1}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+3x+1}-2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+3x+1}-2x\right)}$

$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+3x+1}^2-(2x)^2}{-x\sqrt{\left(4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{4x^2}+3x+1-\cancel{4x^2}}{-x\left(\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+2\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3x+1}{-x\left(\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+2\right)}$

$= \lim_{x\to-\infty}\frac{3\cancel{x}}{-\cancel{x}\left(\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+2\right)} = -\frac{3}{4}$

29. α) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-\sqrt{9x^2-3x+1}}{\sqrt{4x^2-x-3}+3x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-\sqrt{x^2\left(9-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{\sqrt{x^2\left(4-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}+3x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-|x|\sqrt{9-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}{|x|\sqrt{4-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}+3x}$

$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x+x\sqrt{9-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}{-x\sqrt{4-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}+3x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(2+\sqrt{9-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}{-\cancel{x}\left(\sqrt{4-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}-3\right)} = -\frac{1}{5}$

β) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2-2x+5}-3x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(9-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}-3x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{9-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}-3x\right)$

$= \lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{9-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}-3x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\left(\sqrt{9-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}-3\right)\right) = (+\infty)\cdot(3-3)$ απροσδιόριστη μορφή , οπότε όπως στο ά ερώτημα θα έχουμε : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2-2x+5}-3x\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2-2x+5}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2-2x+5}+3x\right)}{\left(\sqrt{9x^2-2x+5}+3x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{9x^2-2x+5}^{\,2}-(3x)^2}{\left(\sqrt{x^2\left(9-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}+3x\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{9x^2}-2x+5-\cancel{9x^2}}{x\left(\sqrt{9-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+3\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x+5}{x\left(\sqrt{9-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+3\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{9-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+3\right)}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}$$

30.α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x-1}+\sqrt{9x^2-5x+3}+5x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x-1}+2x+\sqrt{9x^2-5x+3}+3x\right)$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x-1}+2x\right)+\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2-5x+3}+3x\right)=l_1+l_2$$

❖ $$l_1=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+x-1}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+x-1}-2x\right)}{\sqrt{4x^2+x-1}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{4x^2}+x-1-\cancel{4x^2}}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}-2x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{-x\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}}{-\cancel{x}\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+2\right)}=-\frac{1}{4}$$

❖ $$l_2=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2-5x+3}+3x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2-5x+3}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2-5x+3}-3x\right)}{\left(\sqrt{9x^2-5x+3}-3x\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{9x^2}-5x+3-\cancel{9x^2}}{\sqrt{x^2\left(9-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}-3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-5x+3}{-x\sqrt{9-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}-3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-5\cancel{x}}{-\cancel{x}\left(\sqrt{9-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}+3\right)}$$

$=\frac{5}{6}$, άρα συμπερασματικά : $l=l_1+l_2=-\frac{1}{4}+\frac{5}{6}\Leftrightarrow l=\frac{7}{12}$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x-1}+\sqrt[3]{x^2-5x}-\sqrt[4]{x^3-2x-5}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt[3]{x^3\left(\frac{1}{x}-\frac{5}{x^3}\right)}-\sqrt[4]{x^4\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}-\frac{5}{x^4}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+x\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{5}{x^3}}-x\sqrt[4]{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}-\frac{5}{x^4}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{5}{x^3}}-\sqrt[4]{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}-\frac{5}{x^4}}\right)\right]=+\infty\cdot(2+0-0)=+\infty, \text{ αφού :}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=\ldots\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x^4}=0$.

31.α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu 3x}{x^5+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^5+2}\eta\mu 3x=l$ (περίπτωση μηδενική επί φραγμένη)

Είναι : $\left|\dfrac{\eta\mu 3x}{x^5+2}\right|\le\dfrac{1}{x^5+2} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{x^5+2}\le\dfrac{\eta\mu 3x}{x^5+2}\le\dfrac{1}{x^5+2}$. Παίρνοντας όρια θα έχουμε :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x^5+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^5+2}=0$, άρα από Κριτήριο Παρεμβολής θα είναι : $l=0$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-5x}{x^2+4x-3}\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(2x^2-5)}{x^2+4x-3}\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-5}{x^2+4x-3}\cdot x\eta\mu\dfrac{1}{x}=l$.

υπολογίζουμε τα όρια ξεχωριστά :

- ✓ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-5}{x^2+4x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$ και
- ✓ $\lim\limits_{x\to+\infty}x\eta\mu\dfrac{1}{x}\underset{u\to 0}{\overset{\frac{1}{x}=u}{=}}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{1}{u}\eta\mu u=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$, τελικά $l=2\cdot1\Leftrightarrow l=2$

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x-2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}+\dfrac{\eta\mu x}{x}-2\right)\right]=l$

- ➢ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$ (περίπτωση μηδενικής επί φραγμένη), οπότε

  $l=-\infty\cdot(0+0-2)\Rightarrow l=+\infty$

δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+\sigma\upsilon\nu 3x}{x^3+4x-5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\left(2+\dfrac{\sigma\upsilon\nu 3x}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{5}{x^3}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2+\dfrac{\sigma\upsilon\nu 3x}{x^2}}{x\left(1+\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{5}{x^3}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{2+\dfrac{\sigma\upsilon\nu 3x}{x^2}}{1+\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{5}{x^3}}=l$

- ✓ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$
- ✓ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{5}{x^3}=0$, οπότε το όριο γίνεται : $l=0\cdot\dfrac{2+0}{1+0-0}\Leftrightarrow l=0$

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+2\sigma\upsilon\nu 5x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(3+\dfrac{2\sigma\upsilon\nu 5x}{x}\right)\right]=l$

- ▪ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sigma\upsilon\nu 5x}{x}==0$ (περίπτωση μηδενικής επί φραγμένη), άρα

  $l=+\infty\cdot(3+0)\Leftrightarrow l=+\infty$

στ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\eta\mu 3x-\sigma\upsilon\nu x}{5x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(1+\dfrac{\eta\mu 3x}{x}-\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right)}{\cancel{x}\left(5+\dfrac{3}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\dfrac{\eta\mu 3x}{x}-\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}}{5+\dfrac{3}{x}}=\dfrac{1}{5}$ αφού

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu 3x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x}=0$

32. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+3}-\alpha x+2\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(4+\frac{3}{x^2}\right)}-\alpha x+2\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}-\alpha x+2\right)$

$= \lim_{x\to-\infty}\left[-x\left(\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}+\alpha-\frac{2}{x}\right)\right] = (+\infty)(2+\alpha-0) = (+\infty)(2+\alpha) = \begin{cases}+\infty, & \alpha\nu\ \alpha\succ-2\\ -\infty, & \alpha\nu\ \alpha\prec-2\end{cases}$. Αν $\alpha=-2$, τότε έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\infty\cdot 0$, οπότε επιστρέφουμε στο αρχικό όριο και κάνουμε αντικατάσταση : $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+3}+2x+2\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+3}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+3}-2x\right)}{\sqrt{4x^2+3}-2x}+2$

$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{4x^2}+3\cancel{-4x^2}}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{3}{x^2}\right)}-2x}+2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{3}{-x\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}-2x}+2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{3}{-x\left(\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}+2\right)}+2 = 2$

33. Η σχέση $\left|f(x)-2x\right|\le e^{-\frac{1}{x^4}}$ από ιδιότητες απολύτων γίνεται : $-e^{-\frac{1}{x^4}}\le f(x)-2x\le e^{-\frac{1}{x^4}}$

$\Leftrightarrow -e^{-\frac{1}{x^4}}+2x\le f(x)\le e^{-\frac{1}{x^4}}+2x$

- $\lim_{x\to-\infty}\left(-e^{-\frac{1}{x^4}}+2x\right) = -1-\infty=-\infty$ γιατί : $\lim_{x\to-\infty}\left(-e^{-\frac{1}{x^4}}\right) \overset{\substack{-\frac{1}{x^4}=u\\ u\to 0}}{=} \lim_{u\to0}\left(-e^{u}\right)=-1$ και $\lim_{x\to-\infty}2x=-\infty$
- $\lim_{x\to-\infty}\left(e^{-\frac{1}{x^4}}+2x\right)=1-\infty=-\infty$ (ίδια ακριβώς εξήγηση με το παραπάνω)

Από κριτήριο Παρεμβολής : $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

34.α) ισχύει : $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=5 \Leftrightarrow \lim_{x\to0}\frac{\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x}{x}=-5 \Leftrightarrow \lim_{x\to0}\frac{\cancel{x}\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)}{\cancel{x}}=-5$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to0}\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)=-5$ απ'όπου παίρνουμε ότι $\gamma=-5$. Από την δεύτερη δοθείσα σχέση έχουμε : $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=7 \Leftrightarrow \lim_{x\to1}\frac{\alpha x^3+\beta x^2-5x}{x-1}=7$ (1) , οπότε υποχρεωτικά θέτουμε

$g(x)=\frac{\alpha x^3+\beta x^2-5x}{x-1} \Leftrightarrow g(x)(x-1)=\alpha x^3+\beta x^2-5x$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to1}g(x)(x-1)=\lim_{x\to1}\left(\alpha x^3+\beta x^2-5x\right) \Leftrightarrow 0=\alpha+\beta-5 \Leftrightarrow \beta=5-\alpha$ (2). Επιστρέφουμε στο όριο (1) το οποίο λόγω της (2) γίνεται : $\lim_{x\to1}\frac{\alpha x^3+(5-\alpha)x^2-5x}{x-1}=7$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to1}\frac{\alpha x^3-\alpha x^2+5x^2-5x}{x-1}=7 \Leftrightarrow \lim_{x\to1}\frac{\alpha x^2(x-1)+5x(x-1)}{x-1}=7 \Leftrightarrow \lim_{x\to1}\frac{x\cancel{(x-1)}(\alpha x+5)}{\cancel{x-1}}=7$

$\Leftrightarrow \alpha+5=7 \Leftrightarrow \alpha=2$ και από σχέση (2) προκύπτει ότι $\beta=3$, άρα $f(x)=2x^3+3x^2-5x$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} f(e^{-x}) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(e^{-x})}{e^{-x}} \underset{u\to 0}{\overset{e^{-x}=u}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(u)}{u} \overset{(\alpha)}{=} -5$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{2}(x)\left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{f(x)}-1\right) \underset{u\to 0}{\overset{\frac{1}{f(x)}=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1}{u^{2}}(\sigma\upsilon\nu u-1) = \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu u-1}{u^{2}}$

$=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{(\sigma\upsilon\nu u-1)(\sigma\upsilon\nu u+1)}{u^{2}(\sigma\upsilon\nu u+1)} = \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu^{2}u-1}{u^{2}(\sigma\upsilon\nu u+1)} = -\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu^{2}u}{u^{2}(\sigma\upsilon\nu u+1)} = -\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu u}{u}\right)^{2}\cdot\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu u+1}$

$=-1\cdot\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sigma\upsilon\nu^{2}x)}{\eta\mu^{2}x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sigma\upsilon\nu^{2}x)}{1-\sigma\upsilon\nu^{2}x} \underset{u\to 1}{\overset{\sigma\upsilon\nu^{2}x=u}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(u)}{1-u} = -\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(u)}{u-1} \overset{\varepsilon\kappa\varphi}{=} -7$

35.

36. Για το πρώτο ερώτημα ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)| = \lim\limits_{x\to 0}\sqrt{f^{2}(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 0} f^{2}(x)} = 0$

Από ιδιότητες απολύτων έχουμε : $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0}(-|f(x)|) = -\lim\limits_{x\to 0}|f(x)| = 0$

και $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)| = 0$. Συνεπώς από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε ότι : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

37. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2\alpha^{x}-5\cdot 3^{x}}{\alpha^{x}+3\cdot 4^{x}} = L$. Θα διακρίνουμε περιπτώσεις για τις διάφορες τιμές του α:

❖ Αν $\alpha\in(0,3)$: $L = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2\alpha^{x}-5\cdot 3^{x}}{\alpha^{x}+3\cdot 4^{x}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{\alpha^{x}}\left(2-\dfrac{5\cdot 3^{x}}{\alpha^{x}}\right)}{\cancel{\alpha^{x}}\left(1+\dfrac{3\cdot 4^{x}}{\alpha^{x}}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-5\cdot\left(\dfrac{3}{\alpha}\right)^{x}}{1+3\cdot\left(\dfrac{4}{\alpha}\right)^{x}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3}{\alpha}\right)^{x} = 0$

$\Leftrightarrow$ $L = 2$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4}{\alpha}\right)^{x} = 0$

❖ Αν $\alpha = 3$: $L = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2\cdot 3^{x}-5\cdot 3^{x}}{3^{x}+3\cdot 4^{x}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3\cdot\cancel{3^{x}}}{\cancel{3^{x}}\left(1+3\cdot\dfrac{4^{x}}{3^{x}}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3}{1+3\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^{x}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4}{3}\right)^{x} = 0$

$\Leftrightarrow$ $L = -3$

❖ Αν $\alpha\in(3,4)$: $L=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\alpha^x-5\cdot3^x}{\alpha^x+3\cdot4^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x\left(\frac{2\alpha^x}{3^x}-5\right)}{\alpha^x\left(1+\frac{3\cdot4^x}{\alpha^x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{\alpha}\right)^x\cdot\frac{2\cdot\left(\frac{\alpha}{3}\right)^x-5}{1+3\cdot\left(\frac{4}{\alpha}\right)^x}$.

Από το τελευταίο όριο προκύπτει ότι $L=-\infty$ γιατί : $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{\alpha}\right)^x=+\infty$ και

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2\cdot\left(\frac{\alpha}{3}\right)^x-5}{1+3\cdot\left(\frac{4}{\alpha}\right)^x}\ \overset{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\alpha}{3}\right)^x=0}{\underset{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{\alpha}\right)^x=0}{=}}\ \frac{-5}{1}=-5$$

❖ Αν $\alpha=4$: $L=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\alpha^x-5\cdot3^x}{\alpha^x+3\cdot4^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\cdot4^x-5\cdot3^x}{4^x+3\cdot4^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x\left(\frac{2\cdot4^x}{3^x}-5\right)}{5\cdot4^x}$

$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^x\frac{2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^x-5}{5}\Leftrightarrow L=-\infty$ γιατί : $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^x=+\infty$ και $\lim_{x\to-\infty}\frac{2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^x-5}{5}=-1$

αφού $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^x=0$

❖ Αν $\alpha\succ4$: $L=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\alpha^x-5\cdot3^x}{\alpha^x+3\cdot4^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x\cdot\left(\frac{2\alpha^x}{3^x}-5\right)}{4^x\left(\frac{\alpha^x}{4^x}+3\right)}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^x\cdot\frac{2\left(\frac{\alpha}{3}\right)^x-5}{\left(\frac{\alpha}{4}\right)^x+3}=-\infty$

γιατί : $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^x=+\infty$ ενώ $\lim_{x\to-\infty}\frac{2\left(\frac{\alpha}{3}\right)^x-5}{\left(\frac{\alpha}{4}\right)^x+3}=-\frac{5}{3}$ αφού $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\alpha}{3}\right)^x=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\alpha}{4}\right)^x=0$

38.α) $\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right)$. Θέτουμε $u=\sqrt{x^2+1}-x$ και υπολογίζουμε το $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

$$\overset{+\infty-\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}$$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=0$, άρα αν $x\to+\infty$, τότε $u\to0^+$, συνεπώς $\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right)$

$=\lim_{u\to0^+}\ln u=-\infty$

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right)$. Θέτουμε $u=\sqrt{x^2+1}-x$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x\right)\overset{x\prec 0}{=}\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x\right)$$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)\right)=+\infty$, άρα αν $x\to-\infty$, τότε $u\to+\infty$, άρα το ζητούμενο όριο γίνεται

: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right)=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(2^x+1\right)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(2^x+1\right)-\ln e^x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{2^x+1}{e^x}\right)=l$. Θέτουμε $u=\frac{2^x+1}{e^x}$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x+1}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x\left(1+\frac{1}{2^x}\right)}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^x\left(1+\frac{1}{2^x}\right)=0$ αφού : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^x=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2^x}=0$

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\eta\mu x\right)=l$. Υπολογίζουμε τα δυο όρια ξεχωριστά .

- ✓ $l_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)\underset{u\to 0}{\overset{\frac{1}{x}=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\left(\frac{1}{u}\eta\mu u\right)=\lim\limits_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$

- ✓ $l_2=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\eta\mu x\right)$. Περίπτωση μηδενικής επί φραγμένη : $\left|\frac{1}{x}\eta\mu x\right|\le\frac{1}{|x|}$

  $\Rightarrow-\frac{1}{|x|}\le\frac{1}{x}\eta\mu x\le\frac{1}{|x|}$. Με όριο στο $+\infty$ και με χρήση Κριτηρίου Παρεμβολής παίρνουμε

  $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\eta\mu x\right)=0$. Συνεπώς $l=l_1+l_2\Leftrightarrow l=1$

ε) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{-\frac{1}{x}}\cdot\eta\mu\frac{1}{x}+\ln x\right)$.

39. α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{2x+1}{x^3+x}\right)\right)$. Θέτουμε $u=\frac{2x+1}{x^3+x}$ και υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x^3+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=0$. Συνεπώς $u\to 0^+$ και το αρχικό όριο γίνεται : $\lim\limits_{u\to 0^+}\left(\ln u\right)=-\infty$

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}$. Υπολογίζουμε αρχικά το: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right)$ το οποίο έχει υπολογιστεί στο 38β και ισούται με $+\infty$. Αν θέσουμε $u=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$, τότε $u\to+\infty$ και το αρχικά ζητούμενο όριο γράφεται : $\lim\limits_{u\to+\infty}\left(\frac{3}{\pi}\right)^u$ και το οποίο ισούται με 0 (είναι η περίπτωση $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x$ με $\alpha\in(0,1)$)

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{e^{-x+2}}$. Όπως και στις προηγούμενες δυο περιπτώσεις υπολογίζουμε το :

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x+2}\underset{u\to-\infty}{\overset{-x+2=u}{=}}\lim\limits_{u\to-\infty}e^u=0$, άρα το όριο θέτοντας $e^{-x+2}=t$ γίνεται : $\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{\pi}{3}\right)^t=1$