

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΟΡΙΑ (I, II, III)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - |x|}{|x^2 - 2x|} \left(-\frac{1}{2} \right)$ 2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 4| - x^2 + 2x}{|x^2 - 3x + 2|}$ (Δεν υπάρχει)
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2 + x + 6} + \sqrt{x + 8} - 5x}{x^2 - x} \left(-\frac{73}{12} \right)$ 4. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 + x + 3} - \sqrt{x + 7}}{\sqrt{x - 2}} \quad (0)$
5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt[3]{x + 6} - \sqrt{x - 1} - 1} \left(-\frac{12}{5} \right)$ 6. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x + 5} - \sqrt{x + 1}}{x - 3} \left(-\frac{1}{6} \right)$
7. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{x\sqrt{x} - \sqrt{x} - 6} \left(\frac{4}{11} \right)$ 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin 2x}{x^2} \quad (2)$ 9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\varepsilon\phi x)}{\eta\mu x} \quad (1)$
10. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x^2 - 4)}{x - 2} \quad (4)$ 11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{\sqrt{x + 1} - 1} \quad (4)$
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x (\sin x - 1) + 2x^3}{x^4 + x^3} \left(\frac{3}{2} \right)$ 13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\eta\mu x + 4} - \sqrt{\sin x + 3}}{x} \left(\frac{1}{4} \right)$
14. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 1}{x^2 - 4} = 5$, να βρείτε τα παρακάτω όρια: α. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad (1)$
- b. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + x - 3}{x^2 - 2x} \left(\frac{21}{2} \right)$ c. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x) - 2}{x^2 - 4} \left(\frac{39}{4} \right)$ d. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{4f(x) - x^2} \left(\frac{1}{19} \right)$

15. a. Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει: $f^2(x) + 6x \leq 2xf(x) + 9$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τα: i. $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) - x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

b. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει η σχέση: $x^2 - 3x + 2 \leq f(x)(x - 2) \leq 2x^2 - 7x + 6$, $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

16. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

a. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x - 1} + \sqrt[3]{x - 1} - 2}{\sqrt[4]{x - 1} - 1} \left(\frac{10}{3} \right)$ b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 9} + \sqrt{x^2 + x + 4} - 5}{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1} \left(\frac{5}{6} \right)$

17. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

a. $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3)^2 \eta\mu \frac{2}{x - 3} \quad (0)$ b. $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)^3 \sigma\upsilon\nu \frac{3}{x - 2} \quad (0)$

18. Αν ισχύουν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{x} = 2$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - 2}{x} = -3$, να βρείτε τα παρακάτω όρια:

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x) + \sqrt{x + 4}}{x^2 + x} \left(\frac{41}{4} \right)$ b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(2f(x) + g(x))}{x} \quad (1)$

19. Αν ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{\sqrt{x^2 + 3} - 2} = 5$ να βρείτε τα παρακάτω όρια:

a. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 2x - 3}{|x - 2| - 1} \left(-\frac{11}{2} \right)$ b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 f(x) - 3| - |2 - f(x)| - \sqrt{x}}{x^2 - x} \left(-\frac{5}{2} \right)$

20. a. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x-1}{\sqrt{x+5}-3}$ b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x-\eta\mu x}$ c. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x-5}{\sigma\upsilon\nu x}$ (Δεν υπάρχουν)

21. a. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-3}{x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8}$ $(+\infty)$ b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-1}{x \cdot \eta\mu x}$ $(-\infty)$ c. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{1-\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$ $(-\infty)$

22. a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sigma\upsilon\nu x-1}$ $(-\infty)$ b. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x-2)}{(x-2)^3}$ $(+\infty)$ c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 3x}{x^4}$ $(+\infty)$

23. Αν ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = 5$, να βρείτε το: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h)-f(2-2h)}{h}$ (25)

24. Να βρείτε τα α, β αν ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\alpha x^2 + \beta x - 2}{x-2} = 3$ ($\alpha = 1, \beta = -1$)

Αν $\lim_{x \rightarrow 0} x f(x) = 4$, να βρείτε τα παρακάτω όρια:

25. α. $\lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu^2 2x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \cdot f(x))$ (0) β. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+4}-2)f(x)$ γ. $\lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu x - \epsilon\phi x)f(x)$

26. Αν f συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι:

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)}{h} = 3$, να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ (0) β. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|f^2(x)-3|+f(x)-3}{f^2(x)+f(x)}$ (1) γ. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu 2f(x) - \epsilon\phi 3f(x)}{\eta\mu 4f(x) - \epsilon\phi 5f(x)}$ (1)

27. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 5x + 7}{5x^3 + 4x^2 - 3}$ β. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x - 7}{5x^3 + 2x + 1}$ γ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 3x^2 + 2x + 7}{2x^2 + x - 5}$

28. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{4x^2 - 3x + 5}}{3x - 5}$ $\left(\frac{4}{3}\right)$ β. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 3} + 2x}{2x + 1}$ $\left(\frac{1}{2}\right)$ γ. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + 3x + 1} + 2x)$ $\left(\frac{3}{4}\right)$

29. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{9x^2 - 3x + 1}}{\sqrt{4x^2 - x - 3} + 3x}$ $\left(-\frac{1}{5}\right)$ β. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 - 2x + 5} - 3x)$ $\left(-\frac{1}{3}\right)$

30. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + x - 1} + \sqrt{9x^2 - 5x + 3} + 5x)$ $\left(\frac{7}{12}\right)$ β. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x - 1} + \sqrt[3]{x^2 - 5x} - \sqrt[4]{x^3 - 2x - 5})$

31. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu 3x}{x^5 + 2} \quad (0) \quad \beta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x}{x^2 + 4x - 3} \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \quad (2) \quad \gamma. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x - 2x) \quad (+\infty)$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + \sigma\upsilon\nu 3x}{x^3 + 4x - 5} \quad (0) \quad \epsilon. \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + 2\sigma\upsilon\nu 5x) \quad (+\infty) \quad \sigma\tau. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \eta\mu 3x - \sigma\upsilon\nu x}{5x + 3} \quad \left(\frac{1}{5}\right)$$

32. Να βρείτε το a ώστε $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 3} - ax + 2) \in \mathbb{R}$.

33. Αν ισχύει ότι $|f(x) - 2x| \leq e^{-\frac{1}{x^4}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

34. Έστω η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + \gamma x, \text{ για την οποία ισχύουν: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -5 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 7.$$

α. Να δείξετε ότι: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x$

β. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x f(e^{-x}) \quad (-5)$

γ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^2(x) \left(\sigma\upsilon\nu \frac{1}{f(x)} - 1 \right) \quad \left(\frac{1}{2}\right)$

δ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sigma\upsilon\nu^2 x)}{\eta\mu^2 x} \quad (5)$

35. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει η σχέση: $f^3(x) + 2f(x) + 1 = x^2$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

36. Αν ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} f^2(x) = 0$, να βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)|$ και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

37. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2a^x - 5 \cdot 3^x}{a^x + 3 \cdot 4^x}$, για τις διάφορες τιμές του a .

38. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)) \quad (-\infty) \quad \beta. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)) \quad (+\infty) \quad \gamma. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2^x + 1) - x)$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x\eta\mu \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \eta\mu x \right) \quad (1) \quad \epsilon. \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{-\frac{1}{x}} \cdot \eta\mu \frac{1}{x} + \ln x \right)$$

39. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(\frac{2x+1}{x^3+x} \right) \right) \quad (-\infty) \quad \beta. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{\ln(\sqrt{x^2+1}-x)} \quad (0) \quad \gamma. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{3} \right)^{e^{-x+2}} \quad (1)$$