ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ ΓΙΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Εκτός από τις κλασσικές , θυμηθείτε κυρίως τις δύο παρακάτω :

$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$ $\quad$ $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$, αλλά και την γενικότητα:

$\alpha^\nu-\beta^\nu=(\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-3}\beta^2+...+\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1}),\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \nu\in\mathbb{N}.$

2. ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ (ορισμοί – σχέσεις – συμπεράσματα)

i. Ισχύουν : $|\alpha|=\begin{cases}-\alpha, & \text{αν } \alpha<0\\ \alpha, & \text{αν } \alpha\ge 0\end{cases}$, $|\alpha|^2=\alpha^2$, $-|\alpha|\le\alpha\le|\alpha|$.

ii. Επίσης : $|\alpha\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$, $\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}=\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|$, αλλά $||\alpha|-|\beta||\le|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|$.

Στην τελευταία σχέση, τα ίσον ισχύουν αν οι α,β είναι ετερόσημοι ή ομόσημοι.

iii. Ακόμα, αλλάζουμε πρόσημα (όλα!) όποτε θέλουμε : $|\alpha|=|-\alpha|$, $|\alpha-\beta|=|\beta-\alpha|$

iv. Προσοχή!!!!! $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}=|\alpha|$ για κάθε ν άρτιο φυσικό.

v. $|x|+|y|=0\Rightarrow x=0$ και $y=0$. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν :
$|x|+|y|\le 0$ ή $x^{2\nu}+y^{2\nu}=0$, δηλαδή $x=y=0$.

vi. $|f(x)|\le\alpha\Leftrightarrow-\alpha\le f(x)\le\alpha$, όπου $\alpha>0$.

vii. $|f(x)|\ge\theta\Leftrightarrow f(x)\ge\theta$ ή $f(x)\le-\theta$.

3. ΡΙΖΕΣ

Προσοχή στην περίπτωση όπου έχουμε: $\sqrt[\nu]{\alpha^\kappa}$. Αν το **κ είναι περιττός**, τότε το α είναι απαραίτητα μη αρνητικός και μπορούμε να το γράψουμε στη μορφή : $\sqrt[\nu]{\alpha^\kappa}=\alpha^{\frac{\kappa}{\nu}}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$.

Αν το κ είναι άρτιος, τότε δεν πρέπει απαραίτητα το α να είναι μεγαλύτερος ή ίσος του μηδενός, οπότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, προκειμένου να βγάλουμε τη ρίζα από το συμβολισμό:

$\sqrt[\nu]{\alpha^\kappa}=\begin{cases}(-\alpha)^{\frac{\kappa}{\nu}}, & \text{αν } \alpha\le 0\\ \alpha^{\frac{\kappa}{\nu}}, & \text{αν } \alpha\ge 0\end{cases}$ Γενικά, μπορείτε να χρησιμοποιείτε τις γνωστές ιδιότητες , αλλά και τις δύο πιο περίεργες:

$\sqrt[\nu]{\sqrt[\kappa]{\alpha}}=\sqrt[\nu\kappa]{\alpha}$ και $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\kappa\rho}}=\sqrt[\nu]{\alpha^\kappa}$ ενώ $\alpha\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\cdot\beta}$ για κάθε $\alpha,\beta\ge 0$, $\nu,\kappa\in\mathbb{N}^*$.

4. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

	30°	45°	60°
ημ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συν	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

	0°	90°	180°	270°
ημ	0	1	0	-1
συν	1	0	-1	0
εφ	0	-	0	-
σφ	-	0	-	0

i. Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$ημ^2χ + συν^2χ = 1,\ \ εφχ = \frac{ημχ}{συνχ},\ \ σφχ = \frac{συνχ}{ημχ},\ \ εφχ \cdot σφχ = 1,\ 1 + εφ^2χ = \frac{1}{συν^2χ},\ 1 + σφ^2χ = \frac{1}{ημ^2χ}$$

ii. Τύποι αθροίσματος – διαφοράς (ποτέ δεν ξέρεις) και αποτετραγωνισμού – διπλάσιου τόξου (που πρέπει οπωσδήποτε να ξέρεις!)

$$ημ(α+β) = ημασυνβ + ημβσυνα \qquad ημ(α-β) = ημασυνβ - ημβσυνα$$

$$συν(α+β) = συνασυνβ - ημαημβ \qquad συν(α-β) = συνασυνβ + ημαημβ$$

$$εφ(α+β) = \frac{εφα + εφβ}{1 - εφαεφβ} \qquad εφ(α-β) = \frac{εφα - εφβ}{1 + εφαεφβ}$$

$$ημ2α = 2ημασυνα,\quad συν2α = συν^2α - ημ^2α = 2συν^2α - 1 = 1 - 2ημ^2α,\quad εφ2α = \frac{2εφα}{1 - εφ^2α}$$

$$ημ^2χ = \frac{1 - συν2χ}{2}\quad ,\quad συν^2χ = \frac{1 + συν2χ}{2}\ .$$

iii. Λύσεις τριγωνομετρικών εξισώσεων:

$$ημχ = ημα \Rightarrow χ = 2κπ + α \ \text{ ή }\ χ = 2κπ + π - α$$

$$συνχ = συνα \Rightarrow χ = 2κπ \pm α$$

$$εφχ = εφα \ \text{ ή }\ σφχ = σφα \Rightarrow χ = κπ + α,\ \text{ όπου }\ κ \in \mathbb{Z}.$$

Προσοχή στις 2 περιπτώσεις: $ημχ = 0 \Leftrightarrow χ = κπ,\quad συνχ = 0 \Leftrightarrow χ = κπ + \frac{π}{2}$

iv. Αναγωγή στο 1° τεταρτημόριο

Όταν έχεις π/2 ή 3π/2, αλλάζεις τριγωνομετρικό, αν έχεις π ή 2π, τον αφήνεις ίδιο. Για το πρόσημο, κρίνεις από το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεσαι. Παραθέτω μερικούς τύπους , όχι για παπαγαλία, αλλά για να μάθετε τον τρόπο κοιτώντας το 1° μέλος, να μπορείτε να «βγάλετε» το 2° και όχι να το θυμηθείτε.

$$ημ(π - χ) = ημχ,\ συν(π - χ) = -συνχ,\ εφ(π + χ) = εφχ,\ σφ(π - χ) = -σφχ$$

$$συν(π + χ) = -συνχ,\ ημ(-χ) = -ημχ,\ εφ(-χ) = -εφχ,\ σφ(-χ) = -σφχ,\ \text{αλλά}\ συν(-χ) = συνχ$$

$$ημ(\frac{π}{2} - χ) = συνχ,\ συν(π/2 - χ) = ημχ,\ εφ(π/2 + χ) = -σφχ,\ σφ(π/2 - χ) = εφχ$$

$$συν(3π/2 + χ) = ημχ,\ ημ(\frac{3π}{2} - χ) = -συνχ,\ εφ(\frac{3π}{2} - χ) = -σφχ,\ σφ(\frac{3π}{2} + χ) = -εφχ$$

5. ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ – ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ

i. $f(x)=\alpha^x$, $\alpha>0$, $\alpha\neq 1$, $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, f γνήσια αύξουσα αν $\alpha>1$, γνήσια φθίνουσα αν $0<\alpha<1$.

ii. $f(x)=\ln x$, $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, f γνήσια αύξουσα, $\ln 1=0$, $\ln e=1$, $\ln e^{\text{κάτι}}=e^{\ln(\text{κάτι})}=\text{κάτι}$
$\ln x+\ln y=\ln(xy)$, $\ln x-\ln y=\ln(x/y)$, $\ln x^k=k\ln x$.

ΣΤ. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

i. Δευτεροβάθμιες εξισώσεις

$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0\to\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$, για $\Delta\geq 0$ είναι: $\chi_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

$\alpha\chi^2+\beta\chi=0\Leftrightarrow\chi(\alpha\chi+\beta)=0\Leftrightarrow\chi=0$ ή $\chi=-\dfrac{\beta}{\alpha}$

$\alpha\chi^2+\beta=0$. Λύνουμε ως προς χ^2, τη φέρνουμε στη μορφή $\chi^2=\theta$ και εφόσον $\theta>0$, τότε $\chi=\pm\sqrt{\theta}$.

ii. Εξισώσεις 3ου και άνω βαθμού.
Παραγοντοποιούμε και μετατρέπουμε την παράσταση σε γινόμενο παραγόντων έως δεύτερου βαθμού ή κάνουμε σχήμα Horner.

Ζ. ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

i. Στα δύο μέλη μιας ανίσωσης, μπορούμε να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό χωρίς να αλλάξουμε τη φορά, μπορούμε επίσης να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε με τον ίδιο θετικό αριθμό, επίσης χωρίς να αλλάξουμε τη φορά. Αν όμως διαιρέσουμε ή πολλαπλασιάσουμε με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, πρέπει να αλλάξουμε τη φορά. Με σύμβολα:

Αν $\alpha>\beta$, τότε $\alpha+\gamma>\beta+\gamma$, $\alpha-\gamma>\beta-\gamma$, και εφόσον $\gamma>0$, ισχύει ότι

$\alpha\gamma>\beta\gamma$ και $\dfrac{\alpha}{\gamma}>\dfrac{\beta}{\gamma}$, ενώ, αν $\gamma<0$, είναι $\alpha\gamma<\beta\gamma$ και $\dfrac{\alpha}{\gamma}<\dfrac{\beta}{\gamma}$.

ii. Μεταξύ των μελών δύο ανισώσεων, σε καμιά περίπτωση δεν επιτρέπεται η αφαίρεση και η διαίρεση. Επιτρέπεται , εφόσον μιλάμε για ομοιόστροφες ανισώσεις, η πρόσθεση κατά μέλη και – με την προϋπόθεση ότι όλα τα μέλη είναι θετικές ποσότητες – ο πολλαπλασιασμός κατά μέλη. Συμβολικά:

Αν $\alpha>\beta$ και $\gamma>\delta$ τότε $\alpha+\gamma>\beta+\delta$ και , εφόσον $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ θετικοί, $\alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\delta$

Ισχύουν επίσης οι σχέσεις: Αν α,β ομόσημοι, τότε $\alpha<\beta\Leftrightarrow\dfrac{1}{\alpha}>\dfrac{1}{\beta}$ και

iii. αν α,β θετικοί και ν φυσικός, $\alpha<\beta\Leftrightarrow\alpha^\nu<\beta^\nu$.
Τέλος, αν ν περιττός, τότε $\alpha<\beta\Leftrightarrow\alpha^\nu<\beta^\nu$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

iv. Προσοχή στο εξής: Αν $x > 1$, τότε $x^{\nu} > x$, ενώ, αν $0 < x < 1$ ισχύει ότι $x^{\nu} < x$.

v. Για να λύσουμε ανίσωση 2ου βαθμού, θυμόμαστε τις τρεις περιπτώσεις:

- Αν Δ<0, το τριώνυμο διατηρεί σταθερό πρόσημο, ίδιο με του α. Οπότε η απάντηση στην ανίσωση είναι πως ισχύει για κάθε χ πραγματικό ή πως είναι αδύνατη.
- Αν Δ=0, το τριώνυμο γράφεται σε μορφή ταυτότητας, οπότε είναι $(\kappa\chi + \lambda)^2 \geq 0$ για κάθε χ.
- Αν Δ>0 ή βρούμε δύο ρίζες (με κοινό παράγοντα, διαφορά τετραγώνων ή «μάτι») τότε πριν απαντήσουμε στην ανίσωση, φτιάχνουμε πινακάκι, όπου για τιμές του χ μεταξύ των ριζών το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α και ομόσημο του α παντού αλλού.

Η. ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟ – ΠΗΛΙΚΟ

Μιλάμε για ανισώσεις της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ ή $\frac{A(x)}{B(x)} > \frac{\Gamma(x)}{\Delta(x)}$.

i. Για την μορφή:

$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \cdot B(x) > 0 \\ B(x) \neq 0 \end{cases}$. Εφόσον τα $A(x)$, $B(x)$ είναι μέχρι δευτέρου βαθμού, φτιάχνουμε πινακάκι και συμπληρώνουμε τα πρόσημα. Αν είναι μεγαλύτερου βαθμού παραγοντοποιούμε ή κάνουμε Horner για να μειώσουμε το βαθμό.

ii. Για την μορφή:

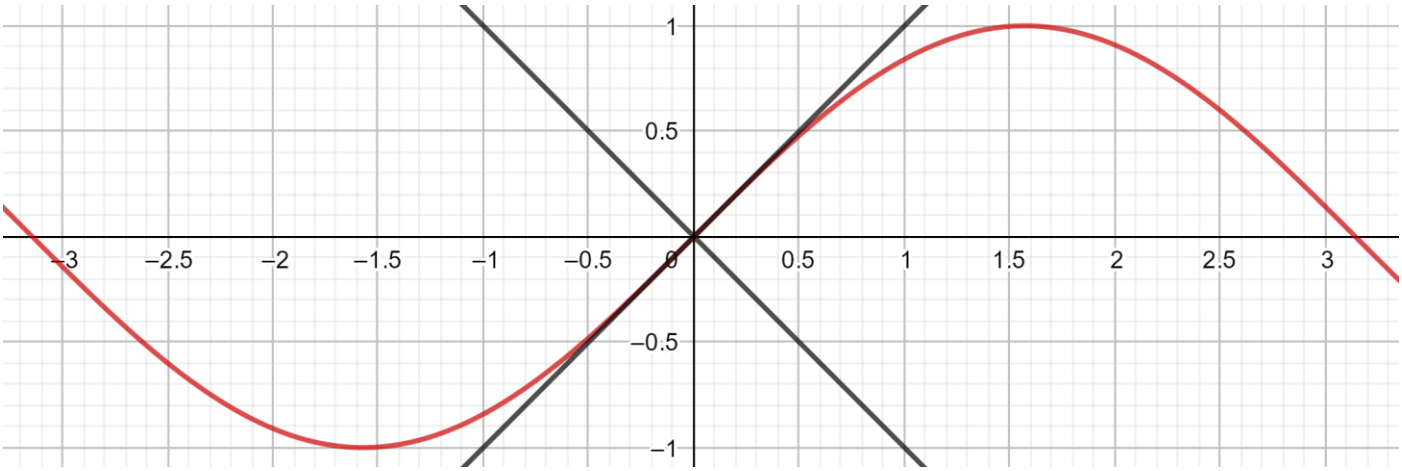
$\frac{A(x)}{B(x)} > \frac{\Gamma(x)}{\Delta(x)} \Leftrightarrow \frac{A(x)}{B(x)} - \frac{\Gamma(x)}{\Delta(x)} > 0$. Κάνουμε ομώνυμα, οπότε το φέρνουμε στη μορφή $\frac{E(x)}{Z(x)} > 0$ και ακολουθούμε την πρώτη περίπτωση.

Θ. ΠΕΡΙΕΡΓΕΣ ΚΑΙ ΟΧΙ ΜΟΝΟ ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Ισχύει πάντα η ανίσωση: $\left|\frac{2x}{x^2+1}\right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{2x}{x^2+1} \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

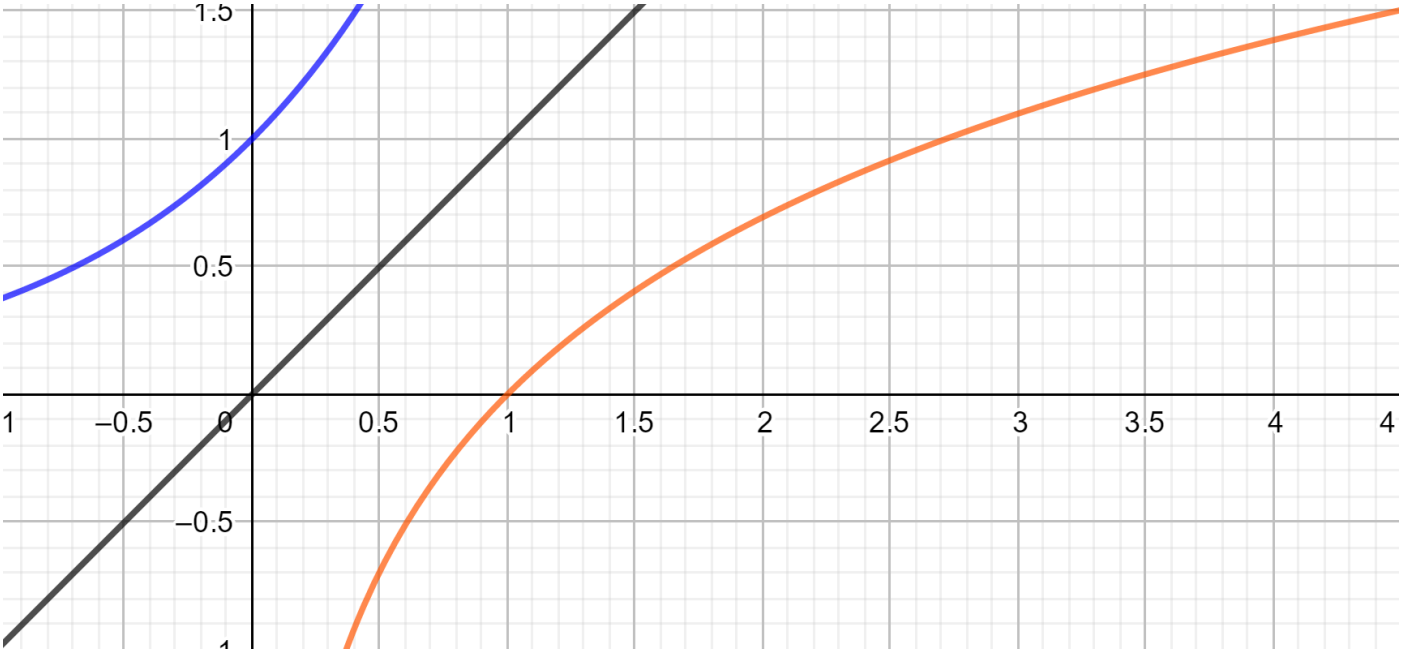
Για κάθε α, β μη αρνητικούς αριθμούς, ισχύει η σχέση: $\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$

Οι ανισώσεις με ημx, x, -x λύνονται με βάση την παρακάτω γραφική παράσταση:



Για παράδειγμα, $\eta\mu x < x \Leftrightarrow x > 0$, $\eta\mu x = x \Leftrightarrow x = 0$, $\eta\mu x > x \Leftrightarrow x < 0$

Επίσης, με βάση τις γραφικές παραστάσεις, ισχύει η ανίσωση: $\ln x < x < e^x$, για κάθε $x > 0$.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να μετατρέψετε σε γινόμενο τις παρακάτω παραστάσεις:

a. $8x^3 - 27 =$ b. $x^6 - 8 =$ c. $x^3 - 64 =$ d. $27x^3 + y^3 =$

e. $(2x-1)^2 - 16x^2 =$ f. $(3x+2)^2 - (2x-1)^2 =$

Απαντήσεις: α. $(2x-3)\cdot(4x^2+6x+9)$ β. $(x^2-2)(x^4+2x^2+4)$ γ. $(x-4)(x^2+4x+16)$

δ. $(3x+y)(9x^2-3xy+y^2)$ ε. $(2x-1-4x)(2x-1+4x) = (-1-2x)(6x-1)$

στ. $(3x+2-2x+1)(3x+2+2x-1) = (x+3)(5x+1)$

2. Να συμπληρώσετε με τις κατάλληλες παραστάσεις τον πίνακα που ακολουθεί:

Αρχική	Συζυγής	Τελικά
$\sqrt{x^2+4}$		
$\sqrt[5]{x^2}$		
$\sqrt{x+3}-1$		
$2-\sqrt{x-4}$		
$\sqrt{x^2+x}-x$		
$\sqrt[3]{x}-2$		
$\sqrt[3]{x+8}-2$		

3. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις-ανισώσεις

α. $|2x-3| = 1$ b. $|2x-3| = 2|x+1|$ c. $|1-4x| = x+2$

d. $|1-2x| \le 3$ e. $|3-x| \ge 2$ f. $|3x+2| \le |x+2|$

a. $x=2$, $x=1$ b. $x=\frac{1}{4}$ c. $x=1, x=-\frac{1}{5}$ d. $-1\le x\le 2$ e. $x\le 1$ ή $x\ge 5$ f. $-1\le x\le 0$

4. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α. $x^2-2x+5>0$ b. $x^2-2x+5<0$ c. $x^2+4x\ge 0$ d. $x^2-3x\le 0$

e. $2x-4x^2\le 0$ f. $x^2-4x+4<0$ g. $4x^2+12x+9>0$ h. $x^2+4>0$

i. $x^2-x-2<0$ k. $4x^2-9\ge 0$ l. $x^2-7<0$ m. $12-x^2<0$

Απαντήσεις: a. $x\in\mathbb{R}$ b. αδύνατη c. $x\in(-\infty,-4]\cup[0,+\infty)$ d. $x\in[0,3]$

e. $x\in(-\infty,0]\cup[\frac{1}{2},+\infty)$ f. αδύνατη g. $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}$ h. $x\notin\mathbb{R}$

i. $x\in(-1,2)$ k. $x\in(-\infty,-\frac{3}{2}]\cup[\frac{3}{2},+\infty)$ l. $x\in(-\sqrt{7},\sqrt{7})$ m. $(-\infty,-2\sqrt{3}]\cup[2\sqrt{3},+\infty)$

5. Να βρείτε τις τιμές του α, ώστε οι παρακάτω ανισώσεις να ισχύουν για κάθε α πραγματικό αριθμό:

α. $ax^2-(a+2)x+a\le 0$ (Απ: $a\in(-\infty,-\frac{2}{3})$ b. $x^2-(3a-2)x+(a-1)^2\ge 0$ (Απ: $a\in(\frac{3}{5},1)$)

6. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

α. $\eta\mu(3\pi-\alpha)=$ β. $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=$ γ. $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=$

δ. $\sigma\varphi(\chi-5\pi)=$ ε. $\eta\mu\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=$ ζ. $\sigma\upsilon\nu(\alpha-3\pi)=$

Απαντήσεις: α. $\eta\mu\alpha$ β. $-\eta\mu\alpha$ γ. $-\sigma\varphi\alpha$ δ. $\sigma\varphi\chi$ ε. $-\sigma\upsilon\nu\alpha$ ζ. $-\sigma\upsilon\nu\alpha$

7. Αν ισχύουν οι σχέσεις:

$2<x<3$ και $1<y<4$, βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

α. $3x-2y$ b. x^2-y^2 c. $10-xy$ d. $\frac{2}{x}+\frac{4}{y}$ e. $y^2-\frac{12}{x}$

Απαντήσεις: α. $-2<3x-2y<7$ b. $-12<x^2-y^2<8$ c. $-2<10-xy<8$

d. $\frac{5}{3}<\frac{2}{x}+\frac{4}{y}<5$ e. $-5<y^2-\frac{12}{x}<12$

8. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

a. $\frac{x^3-7x+6}{(x+1)^2}\ge 0$ b. $\frac{x^2-x-6}{x^3-8}\le 0$ c. $\frac{2x-1}{x+2}<\frac{2x+3}{x-1}$

Απαντήσεις: a. $x\in(-\infty,-3]\cup[1,2]$ b. $x\in(-\infty,-2]\cup(2,3]$ c. $x\in(-2,-\frac{1}{2})\cup(1,+\infty)$

9. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις:

α. $\eta\mu 2x = 0$ $(x = \frac{\kappa\pi}{2})$ β. $\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2} = 0$ $(x = 2\kappa\pi + \pi)$ γ. $\varepsilon\varphi 3x = 1$ $(x = \frac{\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{12})$

δ. $\eta\mu 2x = \sigma\upsilon\nu 2x$ $(x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{8})$ ε. $\sigma\upsilon\nu 2x = -\frac{1}{2}$ $(x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{3})$

στ. $\eta\mu 3x = -\sigma\upsilon\nu 3x$ $(x = \frac{\kappa\pi}{3} - \frac{\pi}{12})$ ζ. $\eta\mu 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(x = \kappa\pi - \frac{\pi}{6}$ ή $x = \kappa\pi + \frac{2\pi}{3})$

η. $\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 2 = 0$ $(x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2})$ θ. $\eta\mu 3x = -\sigma\upsilon\nu x$ $(x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}$ ή $x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{3\pi}{8})$

10. Να λύσετε τις παρακάτω ομάδες εξισώσεων – ανισώσεων:

a. $\begin{cases} x^2 - |x| - 2 = 0 \\ e^{2x} - e^x - 2 = 0 \\ \ln^2 x - \ln x - 2 = 0 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x^2 - |x| - 2 \le 0 \\ e^{2x} - e^x - 2 \ge 0 \\ \ln^2 x - \ln x - 2 > 0 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x^3 - 7x + 6 = 0 \\ \ln^3 x - 7\ln x + 6 = 0 \\ e^{3x} - 7e^x + 6 = 0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x^3 - 7x + 6 < 0 \\ \ln^3 x - 7\ln x + 6 \le 0 \\ e^{3x} - 7e^x + 6 \ge 0 \end{cases}$ e. $\begin{cases} (x-2)^2 + 2|x-2| = 0 \\ (e^x - 1)^2 + 2|e^x - 1| = 0 \\ (\ln x + 2)^2 - 2|\ln x + 2| = 0 \end{cases}$ f. $\begin{cases} (x-2)^2 + 2|x-2| \le 0 \\ (e^x - 1)^2 + 2|e^x - 1| > 0 \\ (\ln x + 2)^2 - 2|\ln x + 2| \le 0 \end{cases}$

Απαντήσεις:

a. $|x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2$, $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$, $x = \frac{1}{e}$ ή $x = e^2$ b. $x \in [-2, 2]$, $x \in [\ln 2, +\infty)$, $x \in (0, \frac{1}{e}) \cup (e^2, +\infty)$

c. $x = -3$ ή $x = 1$ ή $x = 2$, $x = \frac{1}{e^3}$ ή $x = e$ ή $x = e^2$, $x = 0$ ή $x = \ln 2$

d. $x \in (-\infty, -3) \cup (1, 2)$, $x \in (0, \frac{1}{e^3}] \cup [e, e^2]$, $x \in (-\infty, 0] \cup [\ln 2, +\infty)$

e. $x = 2$, $x = 0$, $x = \frac{1}{e^2}$ ή $x = 1$ ή $x = \frac{1}{e^4}$ f. $x = 2$, $x \in \mathbb{R}^*$, $x \in [\frac{1}{e^4}, 1]$

11. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α. $\frac{2x - 1}{x^2 - x - 2} \le 0$ Απαντ.: $x \in (-\infty, -1) \cup [\frac{1}{2}, 2)$

β. $\frac{x + 3}{x^2 - 3x + 2} > 0$ Απαντ.: $x \in (-3, 1) \cup (2, +\infty)$

γ. $\frac{x - 4}{x^2 - x} \ge -1$ Απαντ.: $x \in (-\infty, -2] \cup (0, 1) \cup [2, +\infty)$

δ. $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} \ge 0$ Απαντ.: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup [2, +\infty)$

ε. $\frac{|x| - 2}{x^2 - 5x + 6} \le 0$ Απαντ.: $x \in [-2, 2) \cup (2, 3)$

12. Αν ισχύουν οι σχέσεις:

$2 < x < 3$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών βρίσκονται οι ποσότητες:

α. $-2x - y^2$ Απ: $(-5, 2)$ β. $\frac{3}{x} - \frac{2}{y}$ Απ: $(-1, \frac{1}{2})$ γ. $y^3 - x^2 + 1$ Απ: $(-7, 5)$

13. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α. $3 < |1 - 2x| < 5$ $(x \in (-2, -1) \cup (2, 3))$

b. $|x^2 - 3x + 1| \leq 1$ $\left(x \in [0,1] \cup [2,3]\right)$

c. $e^{2x-1} - e^{x+1} < 0$ $\left(x \in (-\infty, 2)\right)$

d. $\ln^2(x - \ln 2 + 1) + (e^x - 2)^2 \leq 0$ $\left(x = \ln 2\right)$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΠΕΔΙΑ ΟΡΙΣΜΟΥ</u>

Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

a. $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2 + 3x + 2}$ b. $f(x) = \frac{1 - \ln(1-x)}{x^2 - x}$ c. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x + 2}}{\ln x - 1}$

d. $f(x) = \sqrt{2 - \ln 2x} + \sqrt{\ln(x-1)}$ e. $f(x) = \sqrt{e^{2x} - 3e^x + 2}$ f. $f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{x+1}\right)$

g. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{4x + x^2}$ h. $f(x) = \ln(\sqrt{\ln x})$ i. $f(x) = \sqrt{2 - \ln x} - \sqrt{e^x - 3}$

j. $f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{3 - \ln x}\right)$ k. $f(x) = \sqrt{\ln^2 x - \ln x - 2}$ l. $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{|x-3|}} - \sqrt{\frac{x+1}{|x|+1}}$ Απαντήσεις:

a. $[2, +\infty)$ b. $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ c. $(0, e) \cup (e, +\infty)$ d. $[2, e^2/2]$ e. $[0, \ln 2]$ f. $(-1, 3)$
g. $(-\infty, -4] \cup \{0\} \cup [2, +\infty)$ h. $(1, +\infty)$ i. $[\ln 3, e^2]$ j. $(2, e^3)$ k. $(0, 1/e] \cup [e^2, +\infty)$
l. $[2, 3) \cup (3, +\infty)$