Σελίδα 5

Δ1 $e^x \leq \dfrac{1}{1-x} \overset{x<1}{\iff} e^x(1-x) - 1 \leq 0.$

Θεωρώ την $g(x) = e^x(1-x) - 1$, $A_g = (-\infty, -1)$.

Ισχύει ότι $g(0) = 0$ και $g'(x) = -x \cdot e^x$

x	$-\infty$		0		1
g'		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$		$\searrow$	

Άρα η g εμφανίζει μέγιστο για $x=0$ το $g(0)=0$.

Άρα $g(x) \leq 0 \Rightarrow e^x \leq \dfrac{1}{1-x}$.

Δ2 Η f γράφεται:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + \ln(1-x), & x<1 \\ 1, & x=1 \\ e^x + \ln(x-1), & x>1. \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} [e^x + \ln(1-x)] = -\infty$, άρα στο $x_0 = 1$, η f δεν είναι ούτε συνεχής ούτε παραγωγίσιμη.

$$f'(x) = \begin{cases} e^x - \dfrac{1}{1-x}, & x<1 \\ e^x + \dfrac{1}{x-1}, & x>1. \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$-$	‖	$+$	
f		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Η f δεν είναι συνεχής στο 1, άρα ~~δεν~~ παρουσιάζει ακρότατο. $f(1)=1$

Για το σύνολο τιμών της: Αν $x \in (-\infty, 1) \Rightarrow f(x) \in (-\infty, +\infty)$
Αν $x \in (1, +\infty) \Rightarrow f(x) \in (-\infty, +\infty)$ $\Bigg\} \Rightarrow f(A) = \mathbb{R}$

Δ3 Με βάση το σύνολο τιμών της f, η $f(x) = -2020$ έχει 2 ακριβώς ρίζες $\rho_1 < 1 < \rho_2$, ενώ η $f(x) = 1$ έχει 3 ακριβώς ρίζες:

Την $x_0 = 1$ και $x_1 < 1 < x_2$, σύμφωνα με το ΘΕΤ, και τη μονοτονία της f.