A_3 Αληθής. Αφού η f είναι 1-1 - αντιστρέψιμη, υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ώστε $f(x_1) = f(x_2)$. Εφαρμόζω Θ. Rolle στο $[x_1, x_2] \subseteq \Delta$: υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$: $f'(x_0) = 0$, και άρα εφαπτόμενη $\parallel xx'$.

A_4 Λάθος - Λάθος - Λάθος - Λάθος - Λάθος

B_1 Είναι $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0$, άρα $f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$, άρα 1-1.

Επίσης $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, και άρα το σύνολο τιμών της f (άρα και το πεδίο ορισμού της f^{-1}) είναι το $\mathbb{R}$. Βρίσκω την f^{-1}:

$$y = \frac{1}{2}\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right) = \frac{e^x}{2} - \frac{1}{2e^x} \Rightarrow 2ye^x = e^{2x} - 1 \Rightarrow e^{2x} - 2ye^x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{2x} - 2ye^x + y^2 = 1 + y^2 \Rightarrow (e^x - y)^2 = 1 + y^2 \Rightarrow |e^x - y| = \sqrt{1+y^2}.$$

Όμως, $e^x - y = e^x - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0$, και άρα έχω:

$$|e^x - y| = e^x - y = \sqrt{1+y^2} \Rightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right).$$

Άρα η αντίστροφη είναι $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

B_2 Για το πεδίο ορισμού έχω $A_{fog} = \{x > 0,\ g(x) \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty)$.

$$(f \circ g)(x) = f(\ln x) = \frac{1}{2}\left(e^{\ln x} - e^{\ln 1/x}\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2 - 1}{2x}.$$

B_3 i) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x^2-1}{2x} = -\infty$, γιατί $x^2 - 1 < 0$ για x κοντά στο 0.

ii) $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{x^2-1}{2x} \cdot \eta\mu\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{x^2-1}{2x^2} \cdot x \cdot \eta\mu 1/x\right) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$,

αφού $\lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot \eta\mu 1/x = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu 1/x}{1/x} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{\eta\mu y}{y} = 1$.

B_4 Αναζητώ λύση στο $(0, +\infty)$. $h(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{2x} \leq \ln x \Leftrightarrow$

$\overset{x>0}{\Leftrightarrow}$ $x^2 - 1 \leq 2x \cdot \ln x \Leftrightarrow x^2 - 2x \cdot \ln x - 1 \leq 0$. (1)