

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ CORONA1-1920

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να αποδείξετε ότι αν για μια παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ συνάρτηση f ισχύει πως $f'(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνήσια αύξουσα στο Δ . **(Μονάδες 8)**
- A2.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του. **(Μονάδες 3)**
- A3.** Δίνεται ο ισχυρισμός: «Αν μια συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε και η αντίστροφή της είναι γνήσια αύξουσα στο διάστημα $f(\Delta)$ ». Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό ως «Αληθή» ή «Ψευδή» **(1 μονάδα)** και να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας **(3 μονάδες)**
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως «Σωστές» ή «Λάθος».
- i. Μια συνάρτηση ορισμένη στο \mathbb{R} για την οποία ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι 1-1.
 - ii. Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει ότι $f(x) < g(x)$ για τιμές του x κοντά στο x_0 και υπάρχουν τα όρια τους στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
 - iii. Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ορισμένη σε ένα σύνολο Δ για την οποία ισχύει ότι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$, είναι σταθερή.
 - iv. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ , τότε και η σύνθεσή τους έχει πεδίο ορισμού το ίδιο διάστημα Δ .
 - v. Αν μια συνάρτηση f , ορισμένη στο $[a, \gamma]$, γνωρίζουμε ότι είναι γνήσια αύξουσα στο (a, β) και γνήσια φθίνουσα στο (β, γ) , τότε η συνάρτηση έχει ελάχιστο στα σημεία $x=a$ και $x=\gamma$ και μέγιστο για $x=\beta$. **(Μονάδες 10)**

ΘΕΜΑ Β

Στο διπλανό σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών, τα ολικά ακρότατα (αν υπάρχουν) καθώς και τα σημεία ασυνέχειας της συνάρτησης f , αν υπάρχουν.

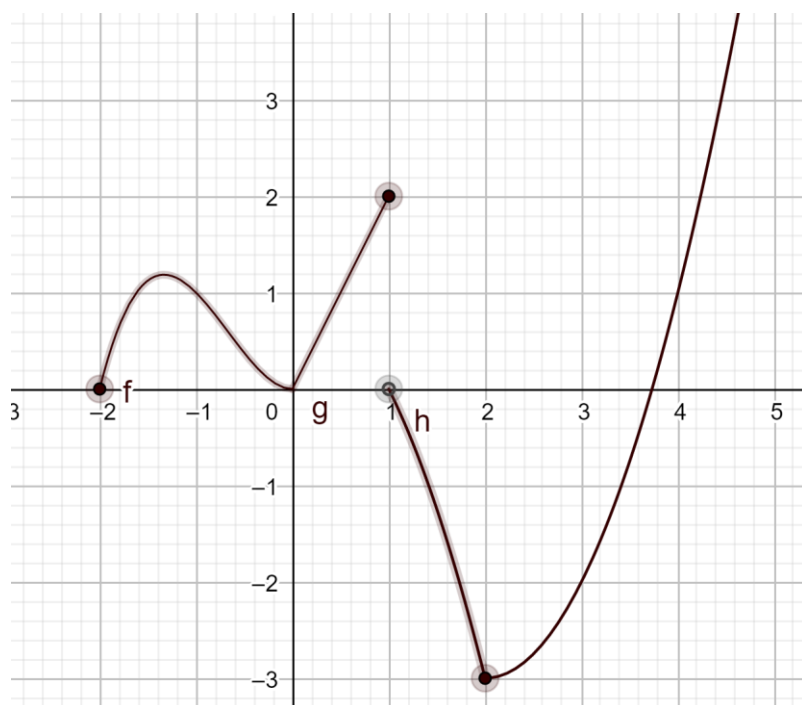
B2. Να βρείτε - αν υπάρχουν - σημεία στα οποία η f δεν είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f'(x) = 0$ για $x > 0$.

B3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = f(e^x - 3) - f(2 - x)$

B4. Να υπολογίσετε τα όρια:

a. $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(f(x))$ b. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(f(x))$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}$ d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(e^x + x)$



B5. Να δείξετε ότι υπάρχει σημείο στο $(-2, -1)$ ώστε η εφαπτομένη σε αυτό, να είναι παράλληλη της διχοτόμου της γωνίας $\chi O\psi$, όπου O η αρχή των αξόνων. Δίνεται ότι $f(-1) = 1$.

(4, 3, 4, 8, 6 μονάδες αντίστοιχα)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω μια γνήσια αύξουσα συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[2,3]$ για την οποία επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις: $f''(x) > 0$ και $f'(3) = f(2) + f(3)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(2) > 0$

(Μονάδες 6)

Γ2. Να δικαιολογήσετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε x στο $[2,3]$.

(Μονάδες 6)

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = (x-2)f'(x)$ έχει μοναδική ρίζα ρ στο $(2,3)$. (Μονάδες 7)

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο $g(x) = \frac{f(x)}{x-2}$, παρουσιάζει μέγιστο στο ρ . (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Να αποδείξετε ότι $e^x \leq \frac{1}{1-x}$, για κάθε $x < 1$.

(Μονάδες 4)

Δ2. Να ελέγξετε τη συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \begin{cases} e^x + \ln|x-1|, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ ως προς την μονοτονία, να

βρείτε το σύνολο τιμών της και τα ακρότατά της - αν υπάρχουν.

(Μονάδες 8)

Δ3. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $f(x) = -2020$ καθώς και της εξίσωσης $f(x) = 1$.

(Μονάδες 5)

Δ4. Σημείο $A(x(t), f(x(t)))$ με $x(t) > 1$, κινείται πάνω στην καμπύλη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τρόπο ώστε η τετμημένη του να αυξάνει με ρυθμό 1 cm/s . Αν M είναι η προβολή του σημείου A στον $\chi\chi'$ και O η αρχή των αξόνων, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής

i. Του εμβαδού του τριγώνου AOM τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία η τεταγμένη του σημείου A ισούται με $e^2 \text{ cm}$.

ii. Της γωνίας AOM την ίδια χρονική στιγμή.

(Μονάδες 8)