ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠ4 – 1920

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν για μια συνεχή και παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ συνάρτηση, η παράγωγός της μηδενίζεται σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση είναι σταθερή στο Δ. **(7 μονάδες)**

Α2. Δίνεται ο ισχυρισμός : «Μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο R η οποία παρουσιάζει ακρότατο σε σημείο x_0 , δεν μπορεί στο ίδιο σημείο να παρουσιάζει σημείο καμπής». Να πείτε αν είναι σωστός ή λάθος και να δικαιολογήσετε την απάντηση σας. **(1 και 4 μονάδες αντίστοιχα).**

Α3. Να δώσετε τον ορισμό του σημείου καμπής μιας συνάρτησης. **(3 μονάδες)**

Α4. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» τους παρακάτω ισχυρισμούς:

α. Κάθε σημείο καμπής μιας συνάρτησης, είναι σημείο στο οποίο η παράγωγός της εμφανίζει τοπικό ακρότατο.

β. Το σύνολο τιμών μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης που ορίζεται σε ένα διάστημα Δ είναι πάντοτε επίσης ένα διάστημα.

γ. Αν x_0 ένας σταθερός αριθμός, ισχύει ότι: $(\eta\mu x_0)' = \sigma\upsilon\nu x_0$

δ. Για μια παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f που έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0 , ισχύει ότι $f'(x_0)=0$.

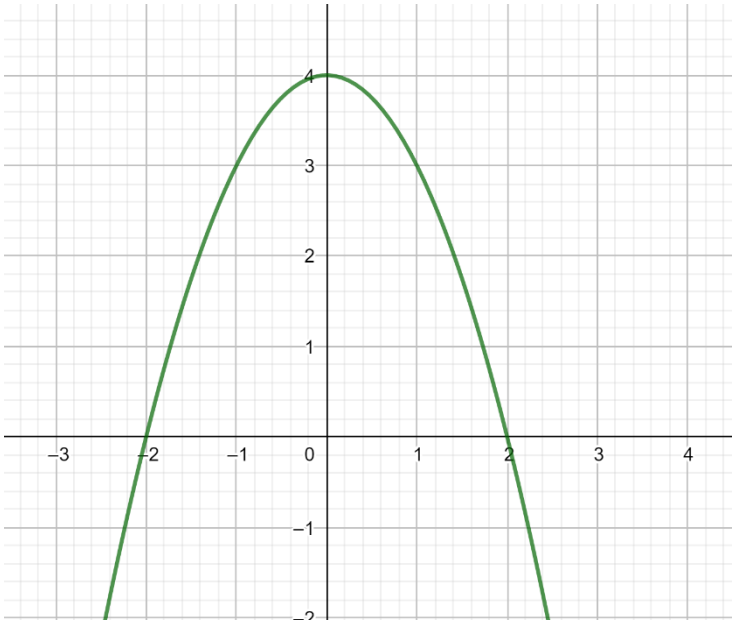
ε. Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού κλειστό διάστημα, μπορεί να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Στο διπλανό σχήμα, φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f, η οποία είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο R και για την οποία γνωρίζουμε ότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}=k,\ k\in\mathbb{R}.$$



Β1. Να αποδείξετε ότι f(0)=2 και να υπολογίσετε την τιμή του k. **(4 μονάδες)**

Β2. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f , τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων της καθώς και το σημείο καμπής της. **(9 μονάδες)**

Β3. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της συνάρτησης f στο 0 και να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=4x+2 έχει μοναδική ρίζα το 0. **(6 μονάδες)**

Β4. Να υπολογίσετε τα όρια: $\alpha.\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x^2-2}{x^2+\eta\mu x}$ $\quad b.\ \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-x}{(x-2)\eta\mu(\pi x)}$ **(6 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x,\ x\in[0,\pi]$.

Γ1. Να βρείτε τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης. **(10 μονάδες)**

Γ2. Να φτιάξετε τον πίνακα μεταβολών της συνάρτησης και να κατασκευάσετε πρόχειρα τη γραφική της παράσταση. **(5 μονάδες)**

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \le \sqrt{2}x - \frac{\pi\sqrt{2}}{4},\ x \in [0,\pi]$. **(5 μονάδες)**

Γ4. Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu\left(\frac{3\pi}{4}\eta\mu x\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{4}\eta\mu x\right) = \sqrt{2},\ x \in [0,\pi]$. **(5 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής στο $[1,+\infty)$ συνάρτηση f για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$f(x)\cdot f'(x) = \frac{1}{2}$ *και* $f(x) > 0$ *για κάθε* $x > 1$, $f(1) = 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x-1}$ και να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων. **(3+3 μονάδες)**

Δ2. Αν Μ(α, f(α)), α>2, σημείο που κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f , (ε) η εφαπτομένη στο Μ, Κ η προβολή του Μ στον οριζόντιο άξονα και Ν το σημείο τομής της (ε) με τον άξονα χχ΄, να βρείτε τις συντεταγμένες του Ν ως συνάρτηση του α **(7 μονάδες)** και το την ταχύτητα με την οποία απομακρύνεται το Ν από το (0,0), αν είναι γνωστό ότι το σημείο Κ κινείται με ταχύτητα 1μ/s.

(3 μονάδες)

Δ3. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΚΜΝ την χρονική στιγμή κατά την οποία το σημείο Μ έχει τετμημένη 5. **(9 μονάδες)**