ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠ-3 – 1920

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α , β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o στο οποίο πάντως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι αν η f ΄(x) διατηρεί πρόσημο στο $(a, x_o) \cup (x_o, \beta)$, τότε το $f(x_o)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνήσια μονότονη. **(9 μονάδες)**

Α2. Ποια σημεία ονομάζονται κ ρ ί σ ι μ α για μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α ; **(3 μονάδες)**

Α3. Δίνεται ο ισχυρισμός: «Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης, είναι μέγιστο για την συνάρτηση.» . Να πείτε αν είναι σωστός ή όχι **(1 μονάδα)** και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(2 μονάδες)**

Α4. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» τους παρακάτω ισχυρισμούς:

i. Αν μια συνάρτηση δέχεται οριζόντια εφαπτομένη σε κάποιο σημείο της x_o , τότε έχει ακρότατο στο σημείο αυτό.

ii. Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι γνήσια φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε f ΄(χ)<0 για κάθε x στο διάστημα Δ.

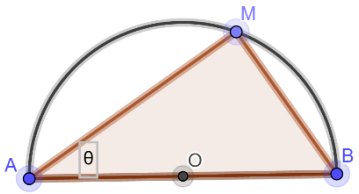
iii. Μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο Α , για την οποία ισχύει f ΄(χ)=0 για κάθε x στο Α , είναι σταθερή στο σύνολο Α.

iv. Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης, μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της ίδιας συνάρτησης.

v. Μία από τις απαραίτητες προϋποθέσεις για την ύπαρξη ακρότατου σε κάποιο σημείο x_o , είναι να αλλάζει η μονοτονία της συνάρτησης γύρω από αυτό. **(10 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Β

Το σημείο Μ στο διπλανό σχήμα, μπορεί να κινείται στο ημικύκλιο με διάμετρο ΑΒ=δ. Ονομάζουμε x την απόσταση ΑΜ και θ την γωνία ΜΑΒ.



Β1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{MB}{MA}$ β. $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{AM}{MB}$ γ. $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{AM}{AB}$ **(6 μονάδες)**

Β2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδό της λευκής επιφάνειας μέσα στο ημικύκλιο δίνεται από την σχέση:

$$E(x) = \frac{\pi\delta^2 - 4x\sqrt{\delta^2 - x^2}}{8}, \ x \in (0, \delta)$$ **(8 μονάδες)**

Β3. Να βρείτε τη γωνία θ ώστε το εμβαδόν της επιφάνειας Ε να γίνεται ελάχιστο , καθώς και την ελάχιστη τιμή του εμβαδού ως συνάρτηση του δ. **(11 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = 2x\ln x + \frac{x^2}{2} - 4x + 1, \ x \in (0, +\infty)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει μοναδικό ελάχιστο σε σημείο του διαστήματος (1, 2). **(10 μονάδες)**

Γ2. Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι αρνητικός αριθμός. **(5 μονάδες)**

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς δύο λύσεις. **(10 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x)=\dfrac{2\sigma\upsilon\nu x}{2-\eta\mu^2 x}, \quad x\in[0,2\pi]$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f'(x)=-\dfrac{2\eta\mu^3 x}{\left(2-\eta\mu^2 x\right)^2}$ **(3 μονάδες)**

Δ2. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f, καθώς και το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης: $f(x)=\dfrac{\pi}{4}$

(12 μονάδες)

Δ3. Να λυθεί η εξίσωση: $f(\sigma\upsilon\nu^2 x)-f(\pi+\sigma\upsilon\nu x)=2,\ x\in[0,\pi]$. **(10 μονάδες)**