ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΗΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι: $|x+y| \leq |x|+|y|$, *για κάθε* $x,y \in \mathbb{R}$. **(10 μονάδες)**

Α2. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ είναι γνήσια αύξουσα στο Δ; **(5 μονάδες)**

Α3. Να χαρακτηρίσετε ως Σωστό ή Λάθος κάθε έναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:

i. Ισχύει η σχέση: $-x \leq |x| \leq x$, *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

ii. Αν μια δευτεροβάθμια εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες, τότε η διακρίνουσά της είναι θετικός αριθμός.

iii. Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\Delta = (-\infty, 0)$, μπορεί να είναι άρτια.

iv. Αν μια συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα στο R, τότε $f(x+1) > f(x)$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

v. Μια δευτεροβάθμια εξίσωση με Δ=0 , έχει πάντοτε θετικό γινόμενο ριζών.

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς x ,y ισχύουν οι σχέσεις: $|2x-1| < 3$ *και* $d(y,0) < 3$.

Β1. Να αποδείξετε ότι: $-4 < x+y < 5$ **(9 μονάδες)**

Β2. Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = |y+4| - |x-2| - |x+1| + |y-5|$ **(8 μονάδες)**

Β3. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{4}{3-x} \in (1,4)$ **(8 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (m+2)x - |m+5| = 0,\ m \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι έχει δύο άνισες ρίζες για κάθε m πραγματικό και να δικαιολογήσετε ότι αυτές δεν μπορούν να είναι αντίστροφοι αριθμοί. **(6+2 μονάδες)**

Γ2. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού m, ώστε αν είναι x_1, x_2 οι ρίζες της, να ισχύει για αυτές η σχέση: $|x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2| = 4$. **(10 μονάδες)**

Για m=-1:

Γ3. Να βρείτε το τριώνυμο που έχει ρίζες τους αριθμούς: x_1^3, x_2^3. **(7 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \dfrac{x^2 - 3|x| - 4}{|x| - 4}$ *και* $g(x) = 3 - x$.

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι: $f(x) = |x| + 1$ **(2+6 μονάδες)**

Δ2. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα χχ′ , και να βρείτε – αν υπάρχουν – τα κοινά σημεία των συναρτήσεων f και g. **(2+7 μονάδες)**

Δ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια και να λύσετε την εξίσωση:

$f(x^2 - 2x) + f(2x - x^2) = 2$ **(2+6 μονάδες)**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α3. Λ-Λ-Λ-Λ-Λ

Β. $-3<2x-1<3 \Leftrightarrow -1<x<2$ *και* $-3<y<3$ *άρα* $x-2<0$, $y+4>0$, $x+1>0$ *και τελικά* $\mathrm{A}=12$. Ε*πίσης*, $1>-x>-2 \Leftrightarrow 4>3-x>1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}<\frac{1}{3-x}<1 \Leftrightarrow 1<\frac{4}{3-x}<4$

Γ. $\Delta=(m+2)^2+4|m+5|>0$ *για κάθε* m *και επειδή* $p=-|m+5|\neq 1$, *οι ρίζες δεν μπορούν να είναι αντίστροφοι αριθμοί.*

Γ2. Η *σχέση οδηγεί σε* $|m+2|\cdot|m+5|=4 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{matrix} m^2+7m+6=0 \\ ή \\ m^2+7m+14=0 \end{matrix} \Leftrightarrow m=-1$ ή $m=-6$.

Γ3. $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=13$, $x_1^3\cdot x_2^3=-64$, $x^2-13x-64=0$.

Δ1. Π*ρέπει* $|x|-4\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \pm 4$, $\mathrm{A}=\mathbb{R}-\{-4,4\}$, $f(x)=\frac{(|x|+1)(|x|-4)}{|x|-4}=|x|+1$

Δ2. Ε*ίναι* $|x|+1>0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$. $|x|+1=3-x \Leftrightarrow |x|=2-x$, *πρέπει* $x\leq 2$ *οπότε* $x=1$, *κοινό σημείο το* $(1,2)$.

Δ3. $f(-x)=|-x|+1=|x|+1=f(x)$, *συνεπώς* $f(x^2-2x)+f(2x-x^2)=2 \Leftrightarrow$
$2f(x^2-2x)=2 \Leftrightarrow |x^2-2x|=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=2$.