ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΓΕΠ1 -1819

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Να αποδείξετε ότι: Αν $f'(x)>0$ στο (α, x_o) και $f'(x)<0$ στο διάστημα (x_o , β) , τότε το $f(x_o)$ είναι τοπικό μέγιστο της f. (8 μονάδες)

Α2. i. Ποια είναι τα σημεία που χαρακτηρίζονται «κρίσιμα» για μια συνάρτηση f ;
(3 μονάδες)
ii. Ισχυρισμός: «Κάθε κρίσιμο σημείο μιας συνάρτησης f είναι και θέση τοπικού ακρότατου της f.» Χαρακτηρίστε ως «Αληθή» ή «Ψευδή» τον παραπάνω ισχυρισμό(1 μονάδα) και δικαιολογήστε την άποψή σας. (3 μονάδες).

Α3. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» τους παρακάτω ισχυρισμούς:
α. Αν για την παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] συνάρτηση f ισχύει $f(\alpha)>f(\beta)$, τότε υπάρχει x_o στο (α, β) τέτοιο ώστε $f'(x_o)<0$.
β. Αν $f(x)=(x^3-2)^2$, *τότε η* $f^{(6)}(0)=720$.
γ. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2}(f(x)\cdot g(x))$, *τότε θα ισούται με* $f(2)\cdot g(2)$.
δ. Η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$, έχει δύο σημεία ασυνέχειας.

ε. Η εικόνα ενός διαστήματος μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης , είναι διάστημα.
(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x)=x-1+\dfrac{4}{x-1},\ x\neq 1.$

Β1. Να φτιάξετε τον πίνακα μεταβολών της συνάρτησης f και να βρείτε τις ασύμπτωτες της – αν υπάρχουν. Στη συνέχεια να κατασκευάσετε τη γραφική της παράσταση, για $x\in[-2,1)\cup(1,4]$.
(8+4 μονάδες)

Β2. Να δείξετε ότι: $(\eta\mu x+4)^2+4\geq\dfrac{13}{3}(\eta\mu x+4)$, *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$. (5 μονάδες)

Β3. Να λύσετε την ανίσωση: $f(2x^2+3)+f(x^3+3)<f(x^3+4)+f(2x^2+2),\quad x>1.$ (8 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής και παραγωγίσιμη στο R, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

- $f(1)+e^{f(1)+1}=0$
- $\dfrac{f'(x)}{x}+\dfrac{f(x)}{x^2}=-4x,\ x\neq 0.$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=-x^3$

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της συνάρτησης f σε κάθε τυχαίο σημείο της $(x_o , f(x_o))$, $x_o\neq 0$, έχει με την συνάρτηση και άλλο κοινό σημείο εκτός του σημείου επαφής, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες ως συνάρτηση του x_o.

Γ3. Έστω Μ(x, f(x)) , x>0 , σημείο κινούμενο πάνω στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με τρόπο ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες/sec. Αν είναι θ η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ΟΜ με τον xx΄, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας, τη χρονική στιγμή που το σημείο Μ βρίσκεται στη θέση (3, -27).

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f συνεχής και παραγωγίσιμη στο R με f(0)=1, η συνάρτηση με τύπο : $g(x) = 2e^{x+x^2}$ και F(x) η αρχική της f για την οποία ισχύει $F(1) = -\frac{1}{2}$. Ισχύει επίσης ότι :

$f'(x)g(x) = f(x)(g(x) - g'(x)),\ x \in \mathbb{R}.$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{-x^2}$. (5 μονάδες)

Δ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα στη γραφική παράσταση της F(x), τον οριζόντιο άξονα και τις ευθείες x=0, x=1. (7 μονάδες)

Δ3. Να αποδείξετε ότι : $\frac{1}{2e^4} < \int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx < \frac{1}{e}$. (7 μονάδες)

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση: $F(\sigma\upsilon\nu x) - F(-\frac{x^2}{2}) = F(-\frac{x^2}{2} + 1) - F(\sigma\upsilon\nu x - 1)$ (6 μονάδες)