

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΕΠ4 - 1819

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής σε αυτό. **(Μονάδες 10)**

A2. Να αποδείξετε με κατάλληλο παράδειγμα ότι μια συνάρτηση μπορεί να είναι συνεχής σε σημείο του πεδίου ορισμού της, χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σε αυτό. **(Μονάδες 5)**

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως «Σωστό» ή «Λάθος»:

i. Μια συνάρτηση για την οποία δεν ορίζεται εφαπτομένη σε κάποιο εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της, μπορεί να είναι παραγωγίσιμη σε αυτό.

ii. Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^x = -\infty$

iii. Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, τότε υπάρχει οπωσδήποτε θετικός αριθμός a ώστε $f(a) > 0$.

iv. Αν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 υπάρχουν, και ισχύει ότι $f(x) < g(x)$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

v. Ισχύει ότι $(f(g(x^2)))' = 2xf(g(x^2))g'(x^2)$, όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο \mathbb{R} .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής στο \mathbb{R} συνάρτηση f για την οποία ισχύουν οι σχέσεις :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + x + 1}{x} = 0 \quad \bullet f^2(x) - \eta\mu^2 x = x^2 + 3 + 2f(x)\sigma\upsilon\nu x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

B1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - \sqrt{x^2 + 4}$ **(Μονάδες 10)**

B2. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{x^2}$ **(Μονάδες 5)**

B3. Να βρείτε τη μονοτονία της f στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός

$\xi, \xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ώστε $f(\xi) = -\frac{3}{2}$. **(Μονάδες 10)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

G1. Να βρείτε την $f'(x)$. **(Μονάδες 8)**

G2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $x + 3y - 5 = 0$ είναι εφαπτομένη της συνάρτησης f και να βρείτε το σημείο επαφής τους. **(Μονάδες 5)**

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{f(x) - \eta\mu f(x)}$ (Μονάδες 7)

Γ4. Να βρείτε την τιμή: $f''(0)$ (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f , συνεχής στο \mathbb{R} , με συνεχή την f^{-1} , για την οποία ισχύει:

$$f(e^{x-1}) = \frac{e^{3x}}{e^3} + \frac{3}{e} \cdot e^x - 4, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^3 + 3x - 4$ (Μονάδες 3)

Δ2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$, καθώς και την εφαπτομένη της $f^{-1}(x)$ στο σημείο της $(0, f^{-1}(0))$ (Μονάδες 10)

Δ3. Να υπολογίσετε το: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f^{-1}(x))^3 + x^2 - 4x - 1}{f^{-1}(x) - 1}$ (Μονάδες 7)

Δ4. Να αποδείξετε ότι: $f(x \ln x) \leq f(x^x - 1)$ για κάθε $x > 0$. (Μονάδες 5)