ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠ4 1819

Α3. Λ -Λ- Λ - Σ - Λ

Β1. *Θέτω* $g(x)=\dfrac{f(x)+x+1}{x}$, *άρα* $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}(xg(x)-x-1)=-1$ *και η δοσμένη σχέση γίνεται*: $f^2(x)-2f(x)\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^2 x=4+x^2 \Leftrightarrow \left(f(x)-\sigma\upsilon\nu x\right)^2=4+x^2 \Leftrightarrow$
$|f(x)-\sigma\upsilon\nu x|=\sqrt{4+x^2}$, *οπότε αν* $h(x)=f(x)-\sigma\upsilon\nu x$, $h(x)\neq 0$, $h(x)$ *συνεχής*, $h(0)=-1$
άρα $h(x)<0$ *δηλαδή* $-f(x)+\sigma\upsilon\nu x=\sqrt{x^2+4} \Leftrightarrow f(x)=\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{x^2+4}$

Β2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{x^2+4}+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1+2-\sqrt{x^2+4}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x^2}+\dfrac{-x^2}{x^2\left(2+\sqrt{x^2+4}\right)}\right)=-\dfrac{3}{4}$

Β3. *Η* f *είναι γνήσια φθίνουσα (με ορισμό ή παράγωγο) και επειδή* $f(0)=-1$,
$f(\frac{\pi}{2})=-\dfrac{\sqrt{\pi^2+4}}{2}$, *είναι* $-\dfrac{\sqrt{\pi^2+4}}{2}<-\dfrac{3}{2}<-1$, *άρα από ΘΕΤ υπάρχει* $\xi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ *ώστε*
$f(\xi)=-\dfrac{3}{2}$, *μοναδικό αφού* f *γνήσια φθίνουσα.*

Γ1. $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{(1-x)^2}, & \alpha\nu\ \ x<1\\ \sqrt[3]{(x-1)^2}, & \alpha\nu\ \ x\geq 1\end{cases}$ *οπότε* $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{1-x}}, & \alpha\nu\ \ x<1\\ \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}, & \alpha\nu\ \ x>1\end{cases}$ *και επειδή*

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}=+\infty$, *η* f *δεν είναι παραγωγίσιμη στο* 1.

Γ2. *Η ευθεία γράφεται στη μορφή* $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}$, *συνεπώς ζητώ να βρω* x_o *ώστε*
$f'(x_o)=-\dfrac{1}{3}$. *Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν* $x_o<1$, *άρα* $-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{1-x}}=-\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x_o=-7$
Βρίσκουμε την εφαπτομένη της f *στο* -7 *και βεβαιώνουμε έτσι ότι η δοσμένη ευθεία είναι πράγματι η εφαπτομένη της στο* $\mathrm{M}(-7,4)$
Γ3. *Επειδή* $f(x)\geq 0$, $f(x)\geq \eta\mu f(x)$, *συνεπώς στο ζητούμενο όριο ο παρονομαστής είναι μη αρνητικός ενώ ο αριθμητής τείνει στο* -3, *άρα δίνει αποτέλεσμα* $-\infty$.

Γ4. $f''(x)=-\dfrac{2}{9}(1-x)^{-\frac{4}{3}}$, *για* $x<1$, *συνεπώς* $f''(0)=-\dfrac{2}{9}$

Δ1. *Θέτω* $y=e^{x-1}$, *συνεπώς* $x-1=\ln y \Leftrightarrow x=\ln y+1$ *άρα* $f(y)=\dfrac{e^{3\ln y+3}}{e^3}+\dfrac{3}{e}e^{\ln y+1}-4 \Leftrightarrow$

$f(y)=y^3+3y-4,\ y>0.$

Δ2. f *γνήσια αύξουσα, με σύνολο τιμών το* $(-4,+\infty)$, *άρα η* f^{-1} *ορίζεται στο* $(-4,+\infty)$, *ενώ* $f^{-1}(0)=k \Leftrightarrow 0=f(k) \xrightarrow[Horner]{} k=1,\ f^{-1}(0)=1.$

$$(f^{-1})'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{-1}(x)-1}{x}=(y=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(y)=x)=\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{f(y)}=\lim_{y\to 1}\frac{1}{\frac{f(y)}{y-1}}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{6},$$ *άρα*

η εφαπτομένη της f^{-1} *στο* 0 *είναι η* $y-1=\dfrac{1}{6}(x-0)\Rightarrow y=\dfrac{1}{6}x+1$

Δ3. *Θέτω* $y=f^{-1}(x)$, *συνεπώς* $x=f(y)$, *άρα* $\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{y^3+f^2(y)-4f(y)-1}{y-1}=$

$$\lim_{y\to 1}\left[\frac{y^3-1}{y-1}+\frac{f(y)}{y-1}(f(y)-4)\right]=3+6(-4)=-21$$

Δ4. $f(x\ln x)\le f(x^x-1)\Leftrightarrow x\ln x\le x^x-1\Leftrightarrow \ln x^x\le x^x-1$ *που ισχύει γιατί προκύπτει από τη σχέση* $\ln x\le x-1$, *αν θέσουμε όπου* x *την ποσότητα* x^x.