ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε τη σχέση:

$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$, *όπου* λ_1, λ_2 *συντελεστές διεύθυνσης των* $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ *και* $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ *όχι παρ/λα του* yy'.

(10 μονάδες)

Α2. Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων;

(5 μονάδες)

Α3. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» τις παρακάτω προτάσεις:

α. Ισχύει η ισοδυναμία: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\beta} = \vec{\gamma}$

β. Ισχύει ότι: $2\vec{i} \cdot 3\vec{j} = 0$

γ. Ισχύει η σχέση: $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{\beta}) \neq 0$

δ. Για μοναδιαία διανύσματα ισχύει η σχέση: $|\vec{\alpha}| \cdot \vec{\beta} = |\vec{\beta}| \cdot \vec{\alpha}$

ε. Αν Μ μέσον του τμήματος ΓΒ, ισχύει η σχέση: $2 \cdot \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{\Gamma A}$ **(10 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα σημεία Κ, Λ, Μ και Ρ του επιπέδου με αντίστοιχα διανύσματα θέσης τα $\vec{\alpha}, 2\vec{\beta}, 3\vec{\alpha}, 6\vec{\beta}$ και ονομάζουμε Α το σημείο τομής των ΚΡ και ΜΛ. (Τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα)

Β1. Να αποδείξετε ότι το ΚΛΡΜ είναι τραπέζιο με βάσεις τις ΚΛ και ΡΜ. **(7 μονάδες)**

Β2. Να εκφράσετε τις διαγώνιους $\overrightarrow{KP}$ *και* $\overrightarrow{\Lambda M}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$. **(6 μονάδες)**

Β3. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών x και y για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$\overrightarrow{A\Lambda} = x \cdot \overrightarrow{\Lambda M}$ και $\overrightarrow{AK} = y \cdot \overrightarrow{PK}$. **(12 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = \left(9 - |\vec{\alpha}|, |\vec{\alpha}| - 2\right)$ καθώς και τα διανύσματα $\vec{\beta} = \left(6, 2\right)$ και $\vec{\gamma} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$. Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ σχηματίζει οξεία γωνία με τον xx΄.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 5$. **(8 μονάδες)**

Γ2. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\left(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}}\right)$ **(8 μονάδες)**

Γ3. Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{v}$, για το οποίο ισχύουν: $\vec{v} + \vec{\beta} // \vec{\gamma}$ και $\vec{v} + \vec{\gamma} \perp \vec{\beta}$. **(9 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ *με* $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1$ *και* $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

Δ1. Να βρείτε ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ το διάνυσμα $\vec{x}$ για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις:

$\vec{x} // \left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right)$ *και* $\left(\vec{x} - 3\vec{\beta}\right) \perp 2\vec{\alpha}$ **(9 μονάδες)**

Δ2. Αν για ένα διάνυσμα $\vec{v}$ *ισχύει* $|\vec{v} - \vec{\alpha}| \cdot \vec{v} = 4\vec{\alpha}$, τότε

i) να δικαιολογήσετε ότι τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{\alpha}$ είναι ομόρροπα **(6 μονάδες)**

ii) να βρείτε το διάνυσμα $\vec{v}$ σαν συνάρτηση του διανύσματος $\vec{\alpha}$ **(10 μονάδες)**

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Λ-Σ-Λ-Λ-Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\overrightarrow{\Lambda K}=\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{O\Lambda}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta},\quad \overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}=3\vec{\alpha}-6\vec{\beta}=3\cdot\overrightarrow{\Lambda K},\quad ά\rho\alpha\ \ \overrightarrow{\Lambda K}//\overrightarrow{PM}$

Β2. $\overrightarrow{KP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OK}=6\vec{\beta}-\vec{\alpha},\quad \overrightarrow{\Lambda M}=3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$

Β3. $\overrightarrow{A\Lambda}-\overrightarrow{AK}=x\overrightarrow{\Lambda M}-y\overrightarrow{PK}\Leftrightarrow -\vec{\alpha}+2\vec{\beta}=x\left(3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right)-y\left(\vec{\alpha}-6\vec{\beta}\right)\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow$

$\left(-1-3x+y\right)\vec{\alpha}+\left(2+2x-6y\right)\vec{\beta}=0\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow 3x-y=-1\ \ \kappa\alpha\iota\ \ x-3y=-1\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{4}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $|\vec{\alpha}|=\sqrt{\left(9-|\vec{\alpha}|\right)^2+\left(|\vec{\alpha}|-2\right)^2}\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|=5$ ή $|\vec{\alpha}|=17$, δεκτή η $|\vec{\alpha}|=5$.

Γ2. Η γωνία βγαίνει 45^o ενώ το διάνυσμα είναι $\vec{\gamma}=\left(2,-1\right)$.

Γ3. Θέτω $\vec{v}=\left(x,y\right)$ και δουλεύω με ορίζουσα για την παραλληλία και το εσωτερικό γινόμενο απαιτώ να είναι μηδέν. Τελικά $\vec{v}=\left(0,-5\right)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αφού αβ=-1 (απλή αντικατάσταση) αξιοποιούμε τις δοσμένες σχέσεις :

$\vec{x}=k\left(\vec{a}-\vec{\beta}\right)$ και $2\vec{\alpha}\vec{\chi}-6\vec{\alpha}\vec{\beta}=0$, πολ / ζω την πρώτη με $\vec{\alpha}$, και λύνοντας το σύστημα, βρίσκω $k=-\frac{3}{5}$.

Δ2. αφού $|\vec{v}-\vec{a}|\geq 0$ και $\vec{v}=\frac{|\vec{v}-\vec{a}|}{4}\cdot\vec{a}$ είναι $\vec{v}\nearrow\nearrow\vec{a}$ οπότε θέτω $\vec{v}=k\cdot\vec{a}$, $k>0$, στην δοσμένη και έχουμε : $|k-1|\cdot|\vec{a}|\cdot k\vec{a}=4\vec{a}\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow 2k|k-1|-4=0\Leftrightarrow$ ...προκύπτουν οι αριθμοί -1 και 2 ως λύσεις, από τις οποίες κρατάμε το 2.