ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΕ ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΕΠ3-1819

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών **(9 μονάδες)**

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής

(3 μονάδες)

Α3. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως «Σωστό» ή «Λάθος»:

1. Οι συνεχείς συναρτήσεις που ορίζονται σε ένα διάστημα, έχουν σύνολο τιμών επίσης ένα διάστημα.

2. Ισχύει η σχέση : $|\eta\mu x| < |x|,\ \forall x \in \mathbb{R}^*$.

3. Αν $\lim\limits_{x\to a} f(x) = k,\ k \in \mathbb{R}^*$, τότε ισχύει ότι $kf(x) > 0$ για τιμές του χ κοντά στο α.

4. Ισχύει η ισοδυναμία: $|\lim\limits_{x\to x_o} f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_o} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_o} f(x) = 0$.

5. Ισχύει η ισοδυναμία: $|\lim\limits_{x\to x_o} f(x)| = a,\ a > 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_o} f(x) = a$ ή $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = -a$

(10 μονάδες)

Α4. Δίνεται ότι: $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = -\infty,\quad \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = a,\ a > 0$. Με αυτό το δεδομένο, χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως «Σωστό» ή «Λάθος».

1. $\lim\limits_{x\to x_o}\left(f(x) - g(x)\right) = -\infty$ 2. $\lim\limits_{x\to x_o}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = +\infty$ 3. $\lim\limits_{x\to x_o}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = +\infty$

(3 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής στο R , συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - ax - 2\beta}{x-1}, & x \neq 1 \\ \beta, & x = 1 \end{cases}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι α=5 και β=-2 και να γράψετε τον τύπο της f(x). (7 μονάδες)

Β2. Να λύσετε στο $(0, +\infty)$ την εξίσωση $f(x) + 2e^{x-1} = 0$. (10 μονάδες)

Β3. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x) - \sqrt{x+2}}{\eta\mu(x-2)}$ (8 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται ότι τη συνεχή στο R συνάρτηση g ισχύει η σχέση:

$(x-3)g(x) \leq x \cdot \eta\mu(x-3)$, για κάθε $x \neq 3$.

i. Να βρείτε το g(3). **(5 μονάδες)**

ii. Να δείξετε ότι η g(x) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (1,8). **(5 μονάδες)**

Γ3. Αν για τη συνεχή συνάρτηση f ισχύουν οι σχέσεις:

$f(0) = 1$ και $f(x)\cdot\left(f(x) + 2\right) = e^{2x} + e^{-2x} + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

i. Να δείξετε ότι $f(x) = e^x + e^{-x} - 1$ **(8 μονάδες)**

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(\ln x) = \dfrac{2}{x} + 2018$, έχει μία ακριβώς ρίζα. **(7 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής στο [1,4] συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

$f(1)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x-3\cdot e^x}{2^x+5\cdot e^x}$, $f(2)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-6x}+x\right)$ και $f(4)=2$. Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση δεν τέμνει τον xx′, να δείξετε ότι:

Δ1. Η συνάρτηση f παίρνει μόνο θετικές τιμές. **(4 μονάδες)**

Δ2. Να δείξετε ότι f(1)=1, f(2)=3 **(4 μονάδες)** , καθώς και ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,4)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=2$. **(4 μονάδες)**

Δ3. Να δείξετε ότι η f(x) δεν είναι 1-1 , καθώς και ότι υπάρχει

$x_o,\ x_o\in[1,4],\ ώστε\ f(x_o)=\dfrac{7f(1,5)+3f(3,5)}{10}$ **(2+5 μονάδες)**

Δ4. Αν, επιπλέον, f γνήσια μονότονη στο [1,2] να λύσετε την εξίσωση:

$f(f(e^x+x+1)-1)=f(4)+1$ στο [1,2]. **(6 μονάδες)**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α: Α3: Λ – Σ – Σ – Σ – Λ Α4: Σ – Λ – Λ

ΘΕΜΑ Β:

Β1. *Ζητώ* $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-ax-2\beta}{x-1}=f(1)=\beta$. *Θέτω* $g(x)=\dfrac{x^3-ax-2\beta}{x-1}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow 1-a-2\beta=0$

$\Leftrightarrow a=1-2\beta$. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-(1-2\beta)x-2\beta}{x-1}=\beta \xleftrightarrow{\sigma\chi.\ \text{Horner}} \lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+2\beta)}{x-1}=\beta\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\beta=-2$

συνεπώς $a=5$, *άρα* $f(x)=x^2+x-4$.

Β2. *Θέτω* $g(x)=2e^{x-1}+x^2+x-4$, $g(x)$ *γνήσια αύξουσα στο* $(0,+\infty)$, *μόνη λύση* $x=1$.

$$\text{Β3. }\lim_{x\to2}\frac{x^2+x-4-\sqrt{x+2}}{\eta\mu(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{\dfrac{x^2+x-6}{x-2}-\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}}{\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x-2}}=\ldots=\lim_{x\to2}\frac{\dfrac{(x-2)(x+3)}{x-2}-\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}}{\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x-2}}=\frac{19}{4}$$

ΘΕΜΑ Γ: Γ1: i. $\lim\limits_{x\to3}g(x)=g(3)=\ldots=3$ ii. *Με θεώρημα* Bolzano *στο* $[3,8]$, $g(8)\le\dfrac{8}{5}\eta\mu5<0$

Γ2: i. $f^2(x)+2f(x)+1=e^x+e^{-x}+2\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow|f(x)+1|=|e^x+e^{-x}|$. *Θέτω* $g(x)=f(x)+1\neq0$

$g(x)$ *συνεχής*, $g(0)=2>0$, *άρα* $g(x)>0$, *συνεπώς* $f(x)=e^x+e^{-x}+1$.

Γ3: i. *Η συνάρτηση* $f(\ln x)=x+\dfrac{1}{x}-1$, $x>0$. *Οπότε η εξίσωση γίνεται*: $x-\dfrac{1}{x}-2019=0$

$\Leftrightarrow x^2-2019x-1=0$, $\Delta>0$, *άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες ετερόσημες αφού* $\dfrac{\gamma}{\alpha}<0$, *συνεπώς δεκτή είναι μόνο μία ρίζα.*

ΘΕΜΑ Δ: Δ1: Η f *διατηρεί πρόσημο*, $f(4)>0$, $f(x)>0$.

Δ2: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x\left(1-3\left(\dfrac{e}{2}\right)^x\right)}{2^x\left(1+5\left(\dfrac{e}{2}\right)^x\right)}=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-6x}{-x\left(\sqrt{1-\dfrac{6}{x}}+1\right)}=3$. *Επειδή* $f(1)=1<2<3=f(2)$, *από* ΘΕΤ *υπάρχει* $\rho\in(1,2)$ *ώστε* $f(\rho)=2$.

Δ3: *Αφού* $f(\rho)=f(4)$, *η* $f(x)$ *δεν είναι* 1–1. *Επίσης, η* f *παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, έστω* $f(x)\in[m,M]$, *συνεπώς*: $7m\le7f(1,5)\le7M$ *και* $3m\le3f(3,5)\le3M$ *και με πρόσθεση κατά μέλη η ποσότητα* $\dfrac{7f(1,5)+3f(3,5)}{10}\in[m,M]$, *οπότε με* ΘΕΤ *προκύπτει.*

Δ4. $f(f(e^x+x+1)-1)=f(4)+1=3=f(2)\Leftrightarrow f(e^x+x+1)-1=2\Leftrightarrow f(e^x+x+1)=3=f(2)$

$\Leftrightarrow e^x+x-1=0$, *αφού* f 1–1 *στο* $[1,2]$. *Θέτω* $g(x)=e^x+x-1$, g *γν. αύξουσα*, $g(0)=0$, *η οποία είναι μη δεκτή.*