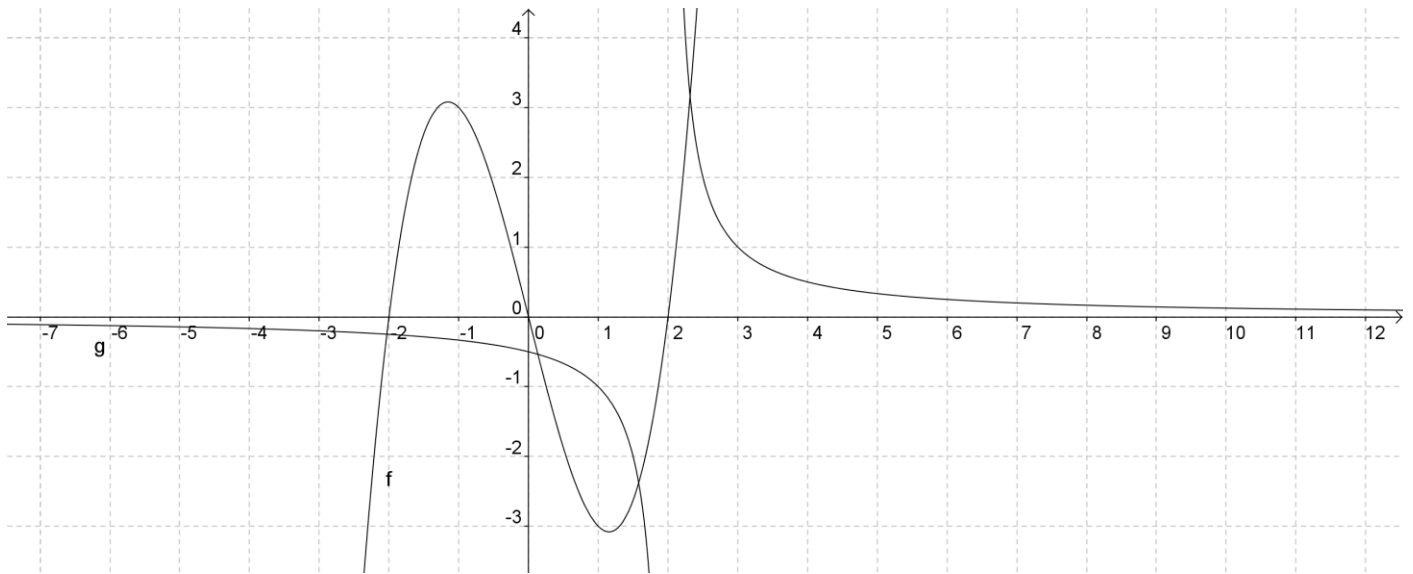


ΘΕΜΑ Α

A1. Με βάση τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g που δίνονται στο παρακάτω σχήμα, να βρείτε - αν υπάρχουν - τα όρια που ζητούνται ή να δικαιολογήσετε ότι δεν υπάρχουν:



- i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|f(x)|}$ iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ iv. $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ v. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{f(x)}$

(15 μονάδες)

A2. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» τους παρακάτω ισχυρισμούς:

i. Αν $f(x) < g(x)$ και υπάρχουν τα όρια των f, g στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

ii. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a, a \in \mathbb{R}$, τότε και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -a$.

iii. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, τότε υπάρχει $a > 0$ ώστε $f(x) < 0$.

iv. Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{\pi}\right)^x = 0$.

v. Αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, a \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a}$.

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

B1. Να υπολογίσετε τις τιμές των πραγματικών a, β για τις οποίες ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - ax + \beta}{x - 2} = 5$

(9 μονάδες)

B2. Να βρείτε - αν υπάρχει - το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 4| + 2x - 4}{|-x^2 + x + 2|}$

(8 μονάδες)

B3. Να βρείτε τα όρια: i. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x - 1}{x - \eta\mu x}$ (4+4 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \cdot 2^x - 5 \cdot a^{x+1}}{3 \cdot a^x + 2^{x+2}} = -5$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - ax + 2} + x - 1) = b$

i. Να αποδείξετε ότι $a=3$.

(5 μονάδες)

ii. Να αποδείξετε ότι $b = \frac{1}{2}$

(4 μονάδες)

iii. Για τις τιμές των a, b που βρήκατε παραπάνω, να υπολογίσετε το: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2bx^3 + 4x}{x^2 + x + 3} \cdot \eta\mu \frac{a}{x}$

(3 μονάδες)

Γ2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu(x-2)}{x^2 - 4x + 4}$ (5 μονάδες)

ii. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{-4x} - \sqrt[3]{x+9}}$ (8 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $P(x)$ πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις:

$$\lim_{x \rightarrow 0} P(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)}{x} = -2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{P(x)}{x^2 - 2x} = 3$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $P(x) = x^3 - x^2 - 2x$

(5 μονάδες)

Δ2. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(P\left(e^{-\frac{1}{x}}\right) + P\left(\frac{\ln x - 1}{\ln x}\right) \right)$

(6 μονάδες)

Δ3. Να βρείτε το: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(\sigma\upsilon\nu x - 1)}{P(\eta\mu x)}$

(8 μονάδες)

Δ4. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} P(\sigma\upsilon\nu x + 2) \cdot \eta\mu \frac{3}{2x - \pi}$

(6 μονάδες)