

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠ1 - 1819 ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=x$ είναι άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} . (10 μονάδες)

A2. Δίνεται ο ισχυρισμός: «Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1 σε ένα διάστημα Δ , τότε είναι και γνήσια μονότονη στο ίδιο διάστημα.»

Να τον χαρακτηρίσετε ως «Αληθή» ή «Ψευδή» και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (5 μονάδες)

A3. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» τις παρακάτω προτάσεις:

- Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $[a, b]$ τότε και η συνάρτηση $(f \circ g)$ έχει πεδίο ορισμού το $[a, b]$
- Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα Δ και είναι 1-1, τότε και η αντίστροφή της είναι επίσης 1-1.
- Αν ισχύει ότι $(f \circ f)(x) = x$, για κάθε $x \in A_f$, τότε $f^{-1}(x) = f(x) = x$.
- Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει ένα το πολύ κοινό σημείο με τον άξονα $\psi\psi'$.
- Αν για μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , ισχύει ότι $f(x) \leq a$ για κάθε $x \in A$, τότε το a είναι η μέγιστη τιμή της. (10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x - 6\sqrt{x} + 10$, $x \in [0, +\infty)$, καθώς και η συνάρτηση $g(x) = f(x) - 1$, $x \in [0, 9]$.

- B1.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή. (8 μονάδες)
- B2.** Να αποδείξετε ότι $(g \circ g)(x) = x$, για κάθε $x \in [0, 9]$. (8 μονάδες)
- B3.** Να λύσετε την εξίσωση: $f(x^2) + f(x^3 - 3x^2 + 9) = 2$ (9 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^3 + 6$, $x \in \mathbb{R}$.

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της. (7 μονάδες)
- Γ2.** Να βρείτε - αν υπάρχουν - τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)$ και $f^{-1}(x)$. (6 μονάδες)
- Γ3.** Να κατασκευάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των $f(x)$, $x \in [-2, 0]$ και $f^{-1}(x)$, $x \in [0, 6]$. (5 μονάδες)
- Γ4.** Να λυθεί η ανίσωση: $f^{-1}(f(\ln x + x - 1) + 8) > 2$ (7 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$

- Δ1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, να δείξετε ότι είναι περιττή και να βρείτε τη μονοτονία της πρώτα στο διάστημα $[0, +\infty)$ και στη συνέχεια στο $(-\infty, 0)$. (10 μονάδες)
- Δ2.** Να βρείτε την αντίστροφή συνάρτηση της καθώς και τη μονοτονία της $f^{-1}(x)$. (7 μονάδες)
- Δ3.** Να λυθεί η ανίσωση: $\sqrt{x^2 + 2x + 2} + x + 1 > \sqrt{1 + e^{-2x}} + e^{-x}$ (8 μονάδες)