

## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠ1 - 1819 ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $y=x$  είναι άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$ . (10 μονάδες)

**A2.** Δίνεται ο ισχυρισμός: «Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι 1-1 σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε είναι και γνήσια μονότονη στο ίδιο διάστημα.»

Να τον χαρακτηρίσετε ως «Αληθή» ή «Ψευδή» και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (5 μονάδες)

**A3.** Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» τις παρακάτω προτάσεις:

- Αν οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  έχουν πεδίο ορισμού το  $[a, b]$  τότε και η συνάρτηση  $(f \circ g)$  έχει πεδίο ορισμού το  $[a, b]$
- Αν η συνάρτηση  $f$  έχει πεδίο ορισμού το διάστημα  $\Delta$  και είναι 1-1, τότε και η αντίστροφή της είναι επίσης 1-1.
- Αν ισχύει ότι  $(f \circ f)(x) = x$ , για κάθε  $x \in A_f$ , τότε  $f^{-1}(x) = f(x) = x$ .
- Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  έχει ένα το πολύ κοινό σημείο με τον άξονα  $\psi\psi'$ .
- Αν για μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$ , ισχύει ότι  $f(x) \leq a$  για κάθε  $x \in A$ , τότε το  $a$  είναι η μέγιστη τιμή της. (10 μονάδες)

### ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = x - 6\sqrt{x} + 10$ ,  $x \in [0, +\infty)$ , καθώς και η συνάρτηση  $g(x) = f(x) - 1$ ,  $x \in [0, 9]$ .

- B1.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  έχει ελάχιστη τιμή. (8 μονάδες)
- B2.** Να αποδείξετε ότι  $(g \circ g)(x) = x$ , για κάθε  $x \in [0, 9]$ . (8 μονάδες)
- B3.** Να λύσετε την εξίσωση:  $f(x^2) + f(x^3 - 3x^2 + 3) = 2$  (9 μονάδες)

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $f(x) = x^3 + 6$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της. (7 μονάδες)
- Γ2.** Να βρείτε - αν υπάρχουν - τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f(x)$  και  $f^{-1}(x)$ . (6 μονάδες)
- Γ3.** Να κατασκευάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των  $f(x)$ ,  $x \in [-2, 0]$  και  $f^{-1}(x)$ ,  $x \in [0, 6]$ . (5 μονάδες)
- Γ4.** Να λυθεί η ανίσωση:  $f^{-1}(f(\ln x + x - 1) + 8) > 2$  (7 μονάδες)

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$

- Δ1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, να δείξετε ότι είναι περιττή και να βρείτε τη μονοτονία της πρώτα στο διάστημα  $[0, +\infty)$  και στη συνέχεια στο  $(-\infty, 0)$ . (10 μονάδες)
- Δ2.** Να βρείτε την αντίστροφή συνάρτηση της καθώς και τη μονοτονία της  $f^{-1}(x)$ . (7 μονάδες)
- Δ3.** Να λυθεί η ανίσωση:  $\sqrt{x^2 + 2x + 2} + x + 1 > \sqrt{1 + e^{-2x}} + e^{-x}$  (8 μονάδες)