ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΕΦ. 2ο Α. Ταυτότητες , ιδιότητες δυνάμεων, διάταξη

2.1 Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

1. $15a^3x-15a^3y+5a^2\beta x-5a^2\beta y$
2. $a^4x^2-a^3x^3-a^3x+a^2x^2$
3. $x^2-4xy^2-16+4y^4$
4. $4x^2-9y^2-6yz^2-z^4$
5. $4a^2x^2-4b^2x^2-9a^2y^2+9b^2y^2$
6. $3a^2x^2-3b^2x^2+6bx^3-3x^4$
7. $4xy(x-y)-6x(x-y)^2+2x(x^2-y^2)$
8. $x^2-y^2+4x-2y+3$
9. $x^2(y-w)+y^2(w-x)+w^2(x-y)$
10. $(\alpha\chi+\mu\beta\psi)^2-\mu(\alpha\psi+\beta\chi)^2$

2.2 Να απλοποιήσετε – αφού πρώτα κάνετε ομώνυμα – τα παρακάτω κλάσματα:

1. $\dfrac{2(\alpha-\beta)}{\alpha^3+\alpha^2\beta}+\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha^3+\alpha\beta^2+2\alpha^2\beta}-\dfrac{5}{\alpha^2+\alpha\beta}$
2. $\dfrac{3\alpha+\beta}{2\alpha^2-3\alpha\beta}-\dfrac{2\alpha+\beta}{3\alpha\beta-2\alpha^2}+\dfrac{12\alpha+10\beta}{9\beta^2-4\alpha^2}$
3. $\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{2x+y}{x^2+xy}-\dfrac{2x-y}{xy-y^2}$
4. $\dfrac{x-3}{3x^2+x}-\dfrac{x+3}{x-3x^2}-\dfrac{x}{9x^2-1}+\dfrac{4x^2-7}{9x^3-x}$

2.3 Να αποδείξετε ότι:

1. $(\alpha\chi+\beta\psi)^2+(\alpha\psi-\beta\chi)^2+(\gamma\chi+\delta\psi)^2+(\gamma\psi-\delta\chi)^2=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)(\chi^2+\psi^2)$
2. $\chi^4-\psi^4-(\chi-\psi)^3(\chi+\psi)=2\chi\psi(\chi^2-\psi^2)$
3. $(\alpha-\beta)^3+(\beta-\gamma)^3+(\gamma-\alpha)^3=3(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$
4. $(x^2-1)(y^2-1)(w^2-1)+(x+yw)(y+wx)(w+xy)=(xyw+1)(x^2+y^2+w^2+2xyw-1)$

2.4 Αν ισχύουν οι σχέσεις: a+b=3, ab=-2, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$a^2+b^2,\quad a^3+b^3,\quad \frac{a}{b}+\frac{b}{a},\quad \frac{b}{a^2}+\frac{a}{b^2},\quad a^2b+ab^2$$

2.5 Αν ισχύει η σχέση: $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$, να αποδείξετε ότι x=y=z.

2.6 Αν ισχύει η σχέση:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0,\ \text{να δείξετε ότι:}\ \frac{yz}{x^2}+\frac{xz}{y^2}+\frac{xy}{z^2}=3$$

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

2.7 Να απλοποιήσετε χρησιμοποιώντας ιδιότητες δυνάμεων τις παρακάτω παραστάσεις και στη συνέχεια να βρείτε την τιμή τους για τις τιμές των μεταβλητών που δίνονται κάθε φορά:

1. $\dfrac{x^{-2}\cdot(y^{-1}\cdot\frac{1}{x^{-3}})^{-2}}{\left(x^{-3}\cdot\frac{1}{y^{-2}}\right)^{-1}\cdot y^{-7}}$, $\gamma\iota\alpha\ \ x=-2018,\ y=2018$ 2. $\dfrac{\left(x^{3}:y^{-2}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{x^{-2}}{y^{3}}\cdot\frac{1}{x}\right)^{-2}}{\left(\frac{x^{-3}}{y^{-1}}:\frac{x^{2}}{y^{3}}\right)^{-1}\cdot x^{-10}}$, $\gamma\iota\alpha\ \ x=4,5\ \ y=0,\overline{2}$

2.8 α. Αν ν φυσικός αριθμός να δείξετε ότι ο αριθμός $\alpha=2\cdot 3^{\nu+1}+3^{\nu+2}$, είναι πολλαπλάσιο του 5.

β. Αν ν φυσικός αριθμός, να δείξετε ότι ο αριθμός $\beta=10\cdot 5^{\nu-1}+3\cdot 5^{\nu+1}+5^{\nu+2}$ είναι άρτιος και πολλαπλάσιο του 21.

2.9 Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α. $2019^2+2018^2-4036\cdot 2019$ b. $\left(\frac{2018}{2019}+\frac{2019}{2018}\right)^2-\left(\frac{2018}{2019}-\frac{2019}{2018}\right)^2$

2.10 Αν γνωρίζετε ότι : $\frac{1}{2}\le x<1\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \frac{1}{3}<y\le 2$, να βρείτε σε ποια διαστήματα πραγματικών αριθμών ανήκουν οι παρακάτω παραστάσεις:

$a.\ 2x+3y-5\ \ b.\ 3-4x\ \ c.\ 1-\frac{3}{y}\ \ d.\ 4-6xy\ \ e.\ \frac{4}{x}-\frac{3}{y}\ \ f.\ 4x^2+9y^2+12xy$

2.11 Να αποδείξετε ότι:

α. $x^2+xy+y^2\ge 0$ b. $x^2-xy+y^2\ge 0$ c. $x+\frac{1}{x}\ge 2$ για $x>0$ d. $\frac{2x}{x^2+1}\ge -1$

2.12 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. $x^2+2x+y^2+1\le 0$ b. $x^2-x+\frac{1}{4}+y^2\le 0$ c. $x^2+y^2-6x+4y+13=0$

2.13 Αν ισχύει ότι: $x<2<y$, να αποδείξετε ότι $x+y>2+\frac{xy}{2}$

2.14 Να συγκρίνετε τους αριθμούς 3^{57} και 5^{38}.

2.15 Να δείξετε ότι ο αριθμός $\alpha=617^4-578^4$ είναι πολλαπλάσιο του 39.

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

Β. Απόλυτες τιμές

2.16 Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις, με τη βοήθεια των συνθηκών που δίνονται σε κάθε περίπτωση:

$A=|x-2|-|3-x|+2|-x|, \quad \alpha\nu \quad 2<x<3.$

$B=|x+2|-2|x+3|+5|x|-|x+1|, \quad \alpha\nu \quad -3<x<-2.$

$\Gamma=|a-x|-|b-y|-|a-b|-|y-x|, \quad \alpha\nu \quad x<a<y<b.$

2.17 Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές

$A=3x-|x-2| \qquad B=|2x-1|-x+1$

$\Gamma=|x-2|^2-|1-x|^2+|x+1| \qquad \Delta=|2-|x||$

2.18 Αν γνωρίζετε ότι |α|=3 και |β|=2, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παραστάσεων: Κ=|α-2β| και Λ=|4-α|+|β-2|.

2.19 Αν ισχύει -3<χ<0 να απλοποιήσετε τις παραστάσεις: $A=|x^2+3x|-|x+4|+|x-1|$, $B=x|x-2|+|x^2-4x+4|+6|x|$ και $\Gamma=|x-x^2|-|4x+12|-|x||3-|x||$

2.20 Να αποδείξετε ότι:

a. $\dfrac{|x|}{|y|}+\dfrac{|y|}{|x|}\geq 2$ b. $\left|x-\dfrac{1}{x}\right|=|x|-\dfrac{1}{|x|}$ c. $\left|\dfrac{3x+7y}{3y+7x}\right|<1 \Leftrightarrow \dfrac{|x|}{|y|}>1$

2.21 Αν ισχύουν $|x-2|<1$ και $|\psi-4|<3$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνονται οι παραστάσεις: α. $x+2\psi$ b. $\pi x^2-\psi$

2.22 Αν ισχύει ότι $|a|\leq 3$, να δείξετε ότι $|a^2-5a+7|\leq 31$.

2.23 Να βρείτε τις τιμές του x, σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

a. $d(x,-3)<5$ b. $d(2x,1)>5$ c. $d(x^2,-1)=10$ d. $d(x,2)+d(2x,4)=0$

2.24 Αν ισχύουν οι σχέσεις:

$|x|<2$ και $|y|<\dfrac{1}{3}$, να δείξετε ότι: $|2x-3y+1|<6$

2.25 α. Να αποδείξετε την ισοδυναμία:

$|a|<|b| \Leftrightarrow a^2<b^2 \ \ \gamma\iota\alpha \ \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \ \ a,b\in\mathbb{R}.$

β. Να λύσετε την ανίσωση: |2χ-3|<|4+2χ|

γ. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, b ισχύουν οι σχέσεις:

$|a|\neq|b| \ \ \kappa\alpha\iota \ \ 1+|ab|<|a+b|$, να αποδείξετε ότι: $|a|<1<|b|$ ή $|b|<1<|a|$.

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

2.26 Αν για τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς α και b ισχύει ότι:

$|a+b|<|a-b|$, να αποδείξετε ότι:

α. Οι α και b είναι ετερόσημοι.

β. Ισχύει η σχέση: $a|b|+b|a|=0$

γ. Αν επιπλέον των προηγούμενων σχέσεων ισχύει ότι $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+1=0$, να αποδείξετε ότι α<0 και b<0.

2.27 Αν ισχύουν οι σχέσεις: $|x|<2$, $|y-3|<1005$ $\kappa\alpha\iota$ $|3x-z|<8$ να αποδείξετε ότι: $|xy-z|<2018$

Γ. Ρίζες πραγματικών αριθμών

2.28 Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

1. $\sqrt{x^2-6x+9}-\sqrt{x^2-2x+1}$, $\alpha\nu$ $1<x<3$.
2. $\sqrt{4x^2-12x+9}+\sqrt{1+2x+x^2}$, $\alpha\nu$ $-1<x<\frac{3}{2}$.

2.29 Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

1. $\sqrt{7-4\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{12+6\sqrt{3}}$
2. $\sqrt{6+4\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

2.30 Να μετατρέψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή: $\frac{6}{\sqrt{3}}, \frac{5}{\sqrt{10}}, \frac{4}{\sqrt{6}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{x}{\sqrt{x}}, \frac{2x^2+3}{\sqrt{4x^2+6}}$.

2.31 Να μετατρέψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

$$\frac{3}{\sqrt{7}-2}, \frac{5}{\sqrt{13}-\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}, \frac{3x}{2-\sqrt{x^2+4}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+2x}-x}.$$

2.32 Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{9x^2-12x+4}=\sqrt{4x^2-12x+9}$, $\alpha\nu$ $\frac{2}{3}<x<\frac{3}{2}$.

2.33 Να εκτελέσετε τις παρακάτω πράξεις, ενοποιώντας σε μια ρίζα κάθε παράσταση:

$$A=\sqrt[5]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt{a}, \quad a>0.$$

$$B=\frac{\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a^5}}, \quad a>0.$$

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

2.34 Να βρείτε το αποτέλεσμα των παρακάτω παραστάσεων:

$$A=(2\sqrt{3}-3)^2-(2\sqrt{3}-6)(\sqrt{3}+2)+(2+3\sqrt{3})^2$$
$$B=(\sqrt{\alpha\beta}-2)^2+(2\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2-(\sqrt{9\alpha}+\sqrt{4\beta})(2\sqrt{\beta}-3\sqrt{\alpha})$$

2.35 Να βρείτε το αποτέλεσμα των παρακάτω παραστάσεων:

$$\mathrm{A}=\sqrt{3-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{6}$$
$$\mathrm{B}=\sqrt{\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt[4]{(\sqrt{2}+1)}\cdot\sqrt[4]{(\sqrt{2}-1)^3}$$
$$\Gamma=\sqrt[6]{a^4b^5c^3}\cdot\sqrt[8]{a^5b^4c^6},\quad a=2^{-\frac{24}{31}},\ b=3^{\frac{3}{4}},\ c=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{5}}$$

2.36 Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$A=\sqrt{7-4\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{12+6\sqrt{3}}\qquad B=\sqrt{6+4\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

2.37 Να γράψετε σαν μια ρίζα τις παρακάτω παραστάσεις:

$$\mathrm{A}=\sqrt{3\cdot\sqrt[4]{3^3\cdot\sqrt[3]{3}}}\qquad \mathrm{B}=\sqrt[5]{\alpha\cdot\sqrt{\alpha\cdot\sqrt[3]{\alpha^2}}}\qquad \Gamma=\sqrt[3]{16\cdot\sqrt[4]{32\cdot\sqrt[3]{2}}}$$

2.38 Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha.\ \frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}+\frac{5\sqrt{2}}{13\cdot\left(\sqrt{3}-2\right)}=\frac{6\sqrt{5}+5\sqrt{6}-5\sqrt{2}}{13}$$
$$\beta.\ \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4\sqrt{3}-3\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}=\frac{26+\sqrt{6}+12\sqrt{10}}{30}$$

2.39 Να συγκρίνετε τους παρακάτω αριθμούς, χωρίς χρήση υπολογιστή:

a. $\sqrt[6]{10}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ b. $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, x^2, x^3, y^2, y^3 αν $0<x<1,\ y>1.$

c. $\sqrt[6]{x^3}$, $x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[4]{x^2}$ d. $\sqrt[5]{3^{12}}$, $\sqrt[3]{9^4}$

2.40 Να βρείτε τους αντίστροφους των παρακάτω αριθμών:

a. $\sqrt{3}-2$ b. $\sqrt{x^2+1}-x$ c. $\sqrt{5+\sqrt{6}}-\sqrt{2}$ d. $\sqrt{7}+\sqrt{11-4\sqrt{7}}$

και να τους γράψετε σαν κλάσματα με ρητό παρονομαστή.

ΒΑΣΙΛΗΣ Μ. ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

ΚΕΦ. 3ο Α. Εξισώσεις 1ου βαθμού

3.1 Να λύσετε, κάνοντας και διερεύνηση όπου απαιτείται, τις παρακάτω εξισώσεις:

1. $(a-3)x=a+1$ 2. $a(x-2)=x(a-3)$ 3. $\lambda(x+1)=2x(\lambda-1)$ 4. $\lambda^3x=\lambda^2$

5. $\frac{1-x}{3}-\frac{\lambda+1}{2}=1-\frac{\lambda x-2}{6}$ 6. $\lambda^2x=\lambda^2+\lambda(1+2x)$ 7. $(1-\lambda^2)x=\lambda-1$

8. $(\lambda^2+4)x=\lambda-2$ 9. $(a^2-\beta^2)x=a^2-a\beta$ 10. $(a-2)x=\beta+1-a$

3.2 Βρείτε την τιμή του α, ώστε η εξίσωση: $(a^2-a)x=a^2-1$ να δέχεται άπειρες λύσεις. Στη συνέχεια, για την τιμή του α που βρήκατε, να λύσετε την εξίσωση:

$(\lambda^2-4a^2)x=1+a+\lambda$

3.3 Δίνονται οι παραμετρικές εξισώσεις:
$(\lambda^2-2\lambda)x=\lambda$ $\kappa\alpha\iota$ $(\lambda^3-7\lambda^2+20)x=\lambda+1.$
Να βρείτε – αν υπάρχει – τιμή του πραγματικού αριθμού λ ώστε να είναι και οι δύο αδύνατες. Υπάρχει τιμή του λ ώστε να δέχονται και οι δύο άπειρες λύσεις;

3.4 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

1. $|2x-5|=4$ 2. $|1-3x|=8$ 3. $|2-x|=|3x+2|$ 4. $|x^2+3|-x=3$

5. $\frac{1-|2x-1|}{3}-\frac{3(1-|1-2x|)}{2}=1-\frac{2|2x-1|-1}{6}$ 6. $\frac{2-|3-x|}{2}-\frac{1-|12-4x|}{3}=\frac{9-|x-3|}{4}$

7. $|x^2-9|=|x-3|$ 8. $\frac{|x+2|}{|2-x|}=3$ 9. $|3|x|-2|=4$ 10. $\frac{x^3-64}{x-4}=x^2+2x+4$

11. $\sqrt{x^2-4x+4}=|2x-1|$ 12. $|x^2-2x|-|x^2-4|=0$ 13. $\sqrt{4x^2-4x+1}=x+1$

14. $|3x-2|=x+10$ 15. $|1-2x|=x$ 16. $|x^2+3x|+|x^2-9|=0$

3.5 Να περιορίσετε κατάλληλα τις τιμές των παραμέτρων α και b, ώστε οι παρακάτω εξισώσεις να μην είναι αδύνατες:

1. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1$ 2. $(a-b)^2\cdot x=a^2-b^2$ 3. $(a^2+b^2)x=(a+b)^2$

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

3.6 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

a. $\frac{x+1}{2x+1}+\frac{2x-1}{x-1}=2$ $(0\ ,-2)$

b. $\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x-3}=2$ $(1,2)$

c. $\frac{2}{x-1}+1=\frac{10}{x+2}$ $(3,4)$

d. $2-\frac{5}{x-2}=\frac{2x-x^2}{4-x^2}$ $(6,-3)$

e. $\frac{3x+1}{x^2+x}-\frac{x+3}{x}=\frac{x-3}{x+1}-1$ $(1,2)$

f. $\frac{x+2}{x-3}-\frac{3-x}{x}=\frac{x^2+6}{x^2-3x}$ $(3,5)$

g. $\frac{x}{x+2}-\frac{5x-20}{x^2-4x}=-\frac{14}{x^2+2x}$ $(1,4)$

h. $\frac{x-10}{x^2-4}-\frac{x}{2-x}=\frac{2}{x+2}$ $(2,-3)$

i. $\frac{x+1}{x-3}-\frac{x}{3x-9}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2x-6}$ (-18)

3.7 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

1. $2x^5-32x=0$ 2. $x^6+64x^3=0$ 3. $(x+3)^5+32=0$ 4. $(x-2)^4+1=0$

5. $(2x-1)^4-8(2x-1)=0$ 6. $(x+3)^5+(2x+6)^2=0$

3.8 Φροντίστε να βρείτε σωστά τις ρίζες που βλέπετε δίπλα σε κάθε μία. Προσπαθήστε να είστε όσο το δυνατόν γρηγορότεροι και γράψτε το αποτέλεσμα σε μορφή γινομένου:

1. $2x^2-5x+3=0$ $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 2. $3x^2+5x-2=0$ $\left(-2,\frac{2}{3}\right)$ 3. $6x^2-5x+1=0$ $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

4. $x^2-7x-8=0$ $(-1,8)$ 5. $-2x^2+3x+5=0$ $\left(\frac{5}{2},-1\right)$ 6. $12x^2-x-1=0$ $\left(-\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$

3.9 Στις παρακάτω δευτεροβάθμιες, οι διακρίνουσες είναι τέλεια τετράγωνα ή αναπτύγματα τετραγώνων. Βρείτε τις ρίζες των εξισώσεων:

1. $2x^2-3ax-5a^2=0$ 2. $2a^2x^2-ax-1=0\ ,a\neq 0$ 3. $-3x^2-ax+4a^2=0$

4. $x^2-(3a-2)x-6a=0$ 5. $x^2+(1-3a)x-3a=0$

($\Alpha\pi\alpha\nu\tau\acute{\eta}\sigma\epsilon\iota\varsigma$: 1. $-a,\frac{5a}{2}$ 2. $\frac{1}{a},-\frac{1}{2a}$ 3. $-\frac{4a}{3},a$ 4. $3a,-2$ 5. $-1,3a$)

3.10 Ότι είπαμε και στην 3.9 άσκηση, αλλά με δύο παραμέτρους αυτή τη φορά:

1. $x^2-(2a+b)x+2ab=0$ $(2a,b)$ 2. $ax^2+(a-b)x-b=0$ $\left(1,-\frac{b}{a}\right)$

3. $2ax^2-(3a-2b)x-3b=0$ $\left(\frac{3}{2},\frac{b}{a}\right)$ 4. $bx^2+(2a+b)x+2a=0$ $\left(-\frac{2a}{b},-1\right)$

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

3.11 Δοκιμάστε με ριζικά τώρα:

1. $x^2-(\sqrt{3}-2)x-2\sqrt{3}=0$ $\left(\sqrt{3},-2\right)$ 2. $\sqrt{3}x^2+(\sqrt{3}+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},-1\right)$

3. $\sqrt{3}x^2-\left(2\sqrt{3}-1\right)x-2=0$ $\left(2\sqrt{3},-\frac{1}{3}\right)$ 4. $2x^2+\left(\sqrt{5}-2\right)x-\sqrt{5}=0$ $\left(\frac{\sqrt{5}}{2},-1\right)$

3.12 Δείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ρίζες:

1. $x^2-(2a+b)x+ab=0$ 2. $3x^2+(2a-3b)x-2ab=0$

3.13 Να λύσετε τις παρακάτω δευτεροβάθμιες εξισώσεις:

1. $x^2-7x+6=0$ 2. $x^2-(\sqrt{3}+\sqrt{2})x+\sqrt{6}=0$ 3. $3x^2-12x+9=0$ 4. $3x^2-5x-2=0$

5. $\sqrt{2}x^2-(1+\sqrt{6})x+\sqrt{3}=0$ 6. $ax^2-\sqrt{5}ax-a=0,\ a\neq 0$ 7. $x^2-(2a+3\beta)x+6a\beta=0$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{3}\right)$ $\left(\frac{\sqrt{5}+3}{2},\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)$ $(2a,\ 3\beta)$

3.14 . Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

1. $(x+3)^2-2|x+3|-3=0$ $(0,-6)$ 2. $(2x-4)^2+3|x-2|-7=0$ $(3,1)$

3. $(1-2x)^2+|4x-2|-3=0$ $(0,\ 1)$ 4. $(3x-6)^2-|12-6x|+1=0$ $(5,\ -1)$

5. $6\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+50=0$ $\left(2,\ \frac{1}{2},\ 3,\ \frac{1}{3}\right)$

6. $3w^4-4w^2+1=0$ $\left(1,\ -1,\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

7. $8\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-2\left(\frac{2-x}{x+1}\right)-1=0$ $(3,\ 1)$

8. $(x-3)(x+1)(x+2)(x-4)=36$ $\left(1,\ 1\pm\sqrt{13}\right)$

3.15 Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

1. $x^2+\left(1+\sqrt{5}\right)x+2\sqrt{5}-2=0$ $(1-\sqrt{5},-2)$

2. $x^2+\left(1-2\sqrt{3}\right)x+1-\sqrt{3}=0$ $\left(1+\sqrt{3},\ \sqrt{3}-2\right)$

3.16 Να βρείτε την τιμή των παραμέτρων ώστε οι παρακάτω εξισώσεις να έχουν διπλή ρίζα και στη συνέχεια βρείτε τη διπλή ρίζα:

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

1. $x^2-(3\lambda+1)x+5-\lambda=0$ $\left(\lambda=1 \text{ ή } \lambda=-\frac{19}{9},\ x=2 \text{ ή } x=-\frac{8}{3}\right)$

2. $x^2+(\mu-1)x+4-\mu=0$ $(\mu=-5 \text{ ή } \mu=3,\ x=3 \text{ ή } x=-1)$

3.17 Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πάντα λύση και στη συνέχεια βρείτε τη λύση.

1. $x^2-(a+\beta)x+a\beta=0$ 2. $ax^2+(a+\beta)x+\beta=0$

3. $x^2+2(2\beta-a)x+a^2+4\beta^2-4a\beta=0$ $(x=a-2\beta)$

4. $4x^2-4(\beta-3a)x+9a^2+\beta^2-6a\beta=0$ $\left(x=\frac{3a-\beta}{2}\right)$

3.18 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

a. $|2|x-1|-3|=5$ $(5,-3)$

b. $|4-|x-2||=3$ $(-5,1,3,9)$

c. $|x-|x-1||=1$ $(x=0 \text{ ή } x\geq 1)$

3.19 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

a. $\sqrt{x^2-4x+4}=3\cdot|2-x|-8$ $(6,-2)$

b. $\sqrt{4x^2-12x+9}=\sqrt{x^2+2x+1}$ $\left(4,\frac{2}{3}\right)$

c. $(x-3)^2-\sqrt{x^2-6x+9}=0$ $(2,\ 3 \text{ ή } 4)$

d. $\sqrt{x^4+2x^2+1}-\sqrt{x^2-2x+1}=x^2$ $(0,2)$

3.20 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

a. $x^2(2x-1)-2x(1-2x)=1-2x$ $\left(\frac{1}{2},-1\right)$

b. $(x-1)(x^2-4)=(x-1)(x+2)$ $(1,-2,3)$

c. $x^3-4x^2+2x-8=0,\quad x=4$

d. $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=0,\quad x=1$

3.21 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

a. $3x|x-2|=x^2|x-2|$ $(0,2,3)$

b. $|2x+1|\cdot|x-2|=3|2-x|$ $(2,1,-2)$

3.22 Να λύσετε τις εξισώσεις:

a. $d(2x,5)=d(3,x)$ $x=\frac{8}{3},\quad x=2$

b. $d(y,-3)+d(x,1)=0$ $y=-3,\ x=1$

c. $d(2x,1)=\sqrt{9x^2-6x+1}$ $x=0,\ x=\frac{2}{5}$

3.23 Δίνεται η εξίσωση $x^2-3x-2=0$ και έστω α και β οι ρίζες της.

α. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$K=a^2+\beta^2,\quad L=a^3+\beta^3,\ M=\frac{a}{\beta^2}+\frac{\beta}{a^2}$ $(K=13,\ L=45,\ M=\frac{45}{4})$

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

β. Να βρείτε το τριώνυμο με ρίζες τους αριθμούς $a^2\beta \ \ και \ \ a\beta^2$. ($x^2+6x-8=0$)

γ. Να λύσετε την εξίσωση: $x^2-\sqrt{L}\cdot x+M=0$ $\left(x=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}\right)$

3.24 Δίνεται η εξίσωση $x^2-(k-1)x-16=0,\ k\in\mathbb{R}$..

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες για κάθε τιμή του k.

β. Αν γνωρίζετε ότι ο λόγος των ριζών του είναι ίσος με -4, να βρείτε τις ρίζες και τον αριθμό k.

3.25 Δίνεται η εξίσωση $x^2-2kx+27=0, k\in\mathbb{R}$.

α. Αν υποθέσετε ότι έχει δύο άνισες ρίζες με τη μία να είναι τριπλάσια της άλλης, να βρείτε την τιμή του k καθώς και τις ρίζες.

β. Είναι δεκτές οι τιμές που βρήκατε; Ελέγξτε τη διακρίνουσα.

3.26 Δίνεται η εξίσωση: $x^2+(k-2)x-8=0,\ k\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες για κάθε τιμή του πραγματικού k.

β. Αν η μία ρίζα ισούται με το τετράγωνο της άλλης, να βρείτε τις ρίζες και τον k.

3.27 Αν ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2-3ax-\beta=0,\ a,\beta\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι ο αριθμός β είναι ρίζα της εξίσωσης: $3x^2+8a^2x+4a^4=0$. Μπορείτε να βρείτε το πρόσημο των ριζών καθώς και την άλλη ρίζα του 1ου τριωνύμου;

(Απ.: Δύο μη αρνητικές ρίζες, β και β/3 ή αλλιώς $-2\alpha^2$, $(-2/3)\alpha^2$.)

3.28 Δίνεται η εξίσωση: $x^2-(k-1)x+k-2=0,\ k\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες.

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του k η εξίσωση έχει:

i. Δύο θετικές ρίζες ii. Δύο αρνητικές ρίζες iii. Δύο ετερόσημες ρίζες

iv. Δύο αντίθετες ρίζες v. Δύο αντίστροφες ρίζες.

3.29 Δίνεται η εξίσωση: $x^2+(2k-1)x+k^2-2=0,\ k\in\mathbb{R}$.

α. Βρείτε για ποιες τιμές του k η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες.

β. Να βρείτε το k ώστε να έχει δύο αντίστροφες ρίζες.

γ. Να βρείτε το k ώστε να έχει δύο αντίθετες ρίζες.

3.30 Δίνεται η εξίσωση : $x^2-(2a+1)x+a^2+a=0,\quad a\in(-1,0)$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου ως συνάρτηση του α.

β) Να βρείτε το πρόσημο των ριζών του τριωνύμου.

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $x^2-2(a+1)x+1=0$

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

ΚΕΦ. 4° : ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

α. Ανισώσεις 1ου βαθμού

4.1 Να βρείτε αν συναληθεύουν τα παρακάτω ζεύγη ανισώσεων και να γράψετε τα αποτελέσματα σε μορφή ένωσης διαστημάτων:

$$1.\begin{cases}3x\le -2\\ 2x\ge -5\end{cases}\quad x\in\left[-\frac{5}{2},-\frac{2}{3}\right]\qquad 2.\begin{cases}1-2x\le 3(1-x)\\ 2(x-3)\le x-1\end{cases}\quad x\in(-\infty,2]\qquad 3.\begin{cases}5x-3\le 7(x+3)\\ 4(1-x)<5(2-x)\end{cases}$$

$$\text{Απαντήσεις}:\ 1.\ x\in\left[-\frac{5}{2},-\frac{2}{3}\right]\qquad 2.\ x\in(-\infty,2]\qquad 3.\ x\in[-3,6)$$

4.2 Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

$$1.|2x-5|<4\quad 2.|1-3x|\ge 8\quad 3.|2-x|>|3x+2|\quad 4.|x^2+3|-|x-1|\le 2+x^2$$

$$\text{Απαντ.}:\ 1.\ x\in\left(\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right)\quad 2.\ x\in(-\infty,-\frac{7}{3}]\cup[3,+\infty)\quad 3.\ x\in(-2,0)\quad 4.\ x\in(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$$

$$5.\ \frac{1-|2x-1|}{3}-\frac{3(1-|1-2x|)}{2}\le 1-\frac{2|2x-1|-1}{6}\qquad 6.\ \frac{2-|3-x|}{2}-\frac{1-|12-4x|}{3}\ge\frac{9-|x-3|}{4}$$

$$\text{Απαντ.}:5.\ y=|2x-1|\le\frac{14}{9}\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{5}{18},\frac{23}{18}\right]\quad 6.\ y=|3-x|\ge\frac{19}{13}\Leftrightarrow x\le\frac{20}{13}\ \text{ή}\ x\ge\frac{58}{13}$$

4.3 Να λύσετε την ανίσωση: $3\le|1-2x|\le 5x$ και να γράψετε το αποτέλεσμα σε μορφή ένωσης διαστημάτων.

4.4 Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

$$\alpha.\ \frac{2+|2x+1|}{5}-\frac{1-|4x+2|}{10}\le\frac{|2x+1|}{2}\qquad \beta.\ \frac{|2x-4|-3}{4}-\frac{1-|6-3x|}{3}\le\frac{1}{2}-\frac{|x-2|}{6}$$

$$\left(\text{Απαντήσεις}:\ \alpha.\ x\in(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)\quad \beta.\ x\in\left[\frac{21}{20},\frac{59}{20}\right]\right)$$

$$\gamma.\ 1\le|x+3|\le 4\qquad \delta.\ 3<|1-2x|<4\qquad \varepsilon.\ |3|x-1|-2|\le 10$$

$$\left(\gamma.\ x\in[-7,-4]\cup[-2,1]\qquad \delta.\ x\in\left[-\frac{3}{2},-1\right]\cup\left[2,\frac{5}{2}\right]\qquad \varepsilon.\ x\in[-3,5]\right)$$

β. Ανισώσεις 2ου βαθμού

4.5 Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

$\alpha.\ 2x^2-5x+3<0 \quad \left(x\in\left(1,\frac{3}{2}\right)\right) \quad \beta.\ 2x^2-5x+3\geq 0 \quad \left(x\in(-\infty,1]\cup[1,5,+\infty)\right)$

$\gamma.\ 4x^2+4x+1<0 \quad (\alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta) \quad \delta.\ 4x^2+4x+1>0 \quad \left(\iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \forall x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}\right)$

$\varepsilon.\ 9-4x^2\geq 0 \quad \left(x\in\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]\right) \quad \sigma\tau.\ x^2-16<0 \quad \left(x\in(-4,4)\right)$

$\zeta.\ -x^2+3x-2\leq 0 \quad \left(x\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty)\right) \quad \eta.\ x^2-7x+10>0 \quad \left(x\in(-\infty,2)\cup(5,+\infty)\right)$

$\theta.\ x^2+4<0 \quad (\alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta) \quad \iota.\ 2x^2+5>0 \quad (\iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \forall x\in\mathbb{R})$

$\iota\alpha.\ -3x^2+6x-3\geq 0 \quad (x=1) \quad \iota\beta.\ 2x^2-12x+18\geq 0 \quad (\iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \forall x\in\mathbb{R})$

$\iota\gamma.\ x^2-2x+5\geq 0 \quad (\iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \forall x\in\mathbb{R}) \quad \iota\delta.\ x^2+x+1\leq 0 \quad (\alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta)$

$\iota\varepsilon.\ x^2+2x-3\leq 0 \quad \left(x\in[-3,1]\right) \quad \iota\sigma\tau.\ 3x-9x^2\leq 0 \quad \left(x\in(-\infty,0]\cup[\frac{1}{3},+\infty)\right)$

$\iota\zeta.\ 3x^2-12x>0 \quad \left(x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\right) \quad \iota\eta.\ x^2+x<0 \quad \left(x\in(-1,0)\right)$

$\iota\theta.\ x-4x^2\geq 0 \quad \left(x\in\left[0,\frac{1}{4}\right]\right) \quad \kappa.\ 4x^2-5x<0 \quad \left(x\in\left(0,\frac{5}{4}\right)\right)$

4.6 Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου α, ώστε οι παρακάτω ανισώσεις να ισχύουν για κάθε πραγματικό αριθμό χ.

$\alpha.\ x^2-(2a+3)x+1>0 \quad \beta.\ ax^2-3x+a<0 \quad \gamma.\ x^2-(3a-1)x+(a+1)^2\geq 0$

$\left(\alpha.\ a\in\left(-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right) \quad \beta.\ a\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right) \quad \gamma.\ a\in\left[-\frac{1}{5},3\right]\right)$

4.7 Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

$\alpha.\ x^2-3|x|-4\leq 0 \quad \beta.\ (x-1)^2+4|x-1|-12<0 \quad \gamma.\ (x+2)^2-3|x+2|+2\leq 0$

4.8 Δίνεται η εξίσωση: $(a-1)x^2-(3a-2)x+a-1=0,\quad a\neq 1.$

α. Να βρείτε την διακρίνουσα ως συνάρτηση του α και να τη γράψετε σε μορφή γινομένου πρωτοβάθμιων παραγόντων.

β. Να βρείτε τις τιμές του α, ώστε η εξίσωση να έχει:

i. Δύο άνισες ρίζες ii. Δύο ίσες ρίζες iii. Καμιά ρίζα

γ. Να βρείτε τις τιμές του α, ώστε η εξίσωση να έχει δύο άνισες θετικές ρίζες.

4.9 Να απλοποιήσετε τα παρακάτω κλάσματα, θεωρώντας ότι οι παρονομαστές δεν μηδενίζονται:

$\alpha.\ \dfrac{x^2+ax-2a^2}{x^2-ax-6a^2} \qquad b.\ \dfrac{x^2-a^2+2ab-b^2}{x^2+ax-bx} \qquad c.\ \dfrac{x^2-2ax+bx-2ab}{x^2-2ax-bx+2ab}$

4.10 Δίνεται η εξίσωση: $x^2-(2a+3)x+1=0,\quad a\in\mathbb{R}.$

α. Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες.

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

β. Να βρείτε τις τιμές του α , ώστε η ανίσωση: $x^2-(2a+3)x+1>0$ να ισχύει για κάθε x πραγματικό αριθμό.

4.11 α. Να εξηγήσετε γιατί η εξίσωση: $x^2+x-a^2-3a-2=0,$ έχει δύο ρίζες για κάθε α πραγματικό αριθμό.
β. Αν γνωρίζετε ότι α>0, να βρείτε την τιμή του α ώστε η ανίσωση:
$x^2+x-a^2-3a-2\le 0,$ να ισχύει για $x\in[-3,\ a+1]$.

4.12 Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x)=ax^2+(a^2-a+1)x-a^2+a,\quad a\in\mathbb{R}$
α. Να βρείτε την μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει ο α, ώστε $f(-2)\ge 0$.
β. Για α=2, να λύσετε την ανίσωση: $f(x)\le 0$.

<u>ΚΕΦ. 5° : ΠΡΟΟΔΟΙ</u>

<u>Α. Αριθμητική πρόοδος</u>

5.1 Δίνεται η ακολουθία με γενικό τύπο $α_ν$=7-4ν. Να αποδείξετε ότι είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της.

5.2 Αν σε μια αριθμητική πρόοδο, η διαφορά του 7^{ου} από τον 15° όρο της είναι ίση με 40, να βρείτε τη διαφορά του 20^{ου} από τον 32° όρο της.

5.3 Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα:
a. $2+5+8+...+302$ ***b.*** $-3-7-11-...-203$

5.4 Αν σε αριθμητική πρόοδο ο 12^{ος} όρος της ισούται με 31 και ο 23^{ος} όρος της με –13, να βρείτε το άθροισμα των 12 πρώτων όρων της.

5.5 Αν σε αριθμητική πρόοδο, το άθροισμα των 12 πρώτων όρων της είναι 300, ενώ το άθροισμα των 16 πρώτων όρων της είναι 528, να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της.

5.6 Να βρείτε το πλήθος των πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου 2, 5, 8,… που απαιτούνται , ώστε το άθροισμά τους να μην ξεπερνάει το 100.

5.7 Έστω η πρόοδος : -20, -16, -12,… . Να βρείτε το ελάχιστο πλήθος των όρων που απαιτούνται ώστε το άθροισμα τους να είναι θετικός αριθμός.

5.8 Αν σε μια αριθμητική πρόοδο με 2019 όρους, ο μεσαίος είναι ίσος με 4, να βρείτε το άθροισμα των 2019 όρων της.

5.9 Σε μια αριθμητική πρόοδο, ο 1^{ος} όρος της ισούται με –5, το άθροισμα των ν πρώτων όρων της με 400 και ο ν-οστός όρος της με 55, να βρείτε το πλήθος των όρων της καθώς και την διαφορά της προόδου.

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

5.10 Σε μια αριθμητική πρόοδο δίνεται ότι: $S_{16}-S_{15}=400$ και $S_8-S_7=24$. Να υπολογίσετε το άθροισμα : $a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}+a_{16}$.

5.11 Να λυθούν οι εξισώσεις:
$\boldsymbol{a}.\ 1+7+13+...+\boldsymbol{x}=280 \quad \boldsymbol{b}.\ (\boldsymbol{x}+1)+(\boldsymbol{x}+4)+(\boldsymbol{x}+7)+...+(\boldsymbol{x}+28)=155$

5.12 Δίνονται οι ακολουθίες με τύπους: $\boldsymbol{a}_\nu=17-5\boldsymbol{\nu},\ \ \beta_\nu=12-4\boldsymbol{\nu}$. Να βρείτε τον μοναδικό κοινό όρο των δύο ακολουθιών και στη συνέχεια να βρείτε τους μικρότερης τάξης όρους τους που να διαφέρουν κατά 10 μονάδες.

5.13 Σε ένα αμφιθέατρο με 15 σειρές, το πλήθος των καθισμάτων από σειρά σε σειρά διαφέρει κατά σταθερό πλήθος θέσεων. Αν η μεσαία σειρά έχει 33 καθίσματα, να βρείτε το συνολικό πλήθος των θέσεων.

5.14 Δίνονται οι ακολουθίες a_ν, β_ν : -1, 4, 9, 14, … και 5, 9, 13, 17,… . Καθώς παρατηρείτε, είναι $a_3=\beta_2$. Ποιοι είναι οι αμέσως επόμενοι ίσοι όροι τους; Τι άθροισμα έχουν οι 10 πρώτοι ίσοι όροι τους;

5.15 Σε ένα θέατρο, στην πρώτη σειρά υπάρχουν 12 θέσεις ,στη δεύτερη 16 θέσεις, στην τρίτη 20 θέσεις κ.ο.κ . Σε μια παράσταση, στην $1^η$ σειρά υπάρχει μια κενή θέση, στη $2^η$ σειρά 3 κενές, στην $3^η$ σειρά 5 κενές θέσεις κ.ο.κ.. Το θέατρο διαθέτει 16 σειρές καθισμάτων. Να βρείτε πόσοι θεατές παρακολουθούν την παράσταση.

5.16 Μεταξύ των αριθμών 7 και 40 να παρεμβάλλετε 10 όρους έτσι ώστε να φτιάχνουν μαζί με τους 7 και 40 μια αριθμητική πρόοδο.

5.17 Έστω ότι οι αριθμοί α=x-3, β=2x+1 και γ=2x+3 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Αν ο α είναι ο $3^{ος}$ όρος της προόδου αυτής, να υπολογίσετε το άθροισμα: $a_1+a_4+a_7+...+a_{37}$.

5.18 Σε πρόοδο με $1^ο$ όρο 2 και διαφορά ίση με 3, να βρείτε το πλήθος των όρων που πρέπει να πάρουμε από τον $7^ο$ και μετά, ώστε το άθροισμα τους να είναι ίσο με 130. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το: $a_7+a_8+a_9+...+a_{12}$.

5.19 Να βρείτε τέσσερις διαδοχικούς όρους Α.Π με άθροισμα 0 και γινόμενο 144.

5.20 Να βρείτε το άθροισμα όλων των αριθμών από 1 έως 300 που δεν είναι πολλαπλάσια του 5 ή του 7 .

5.21 Σε πρόοδο για την οποία γνωρίζουμε ότι $a_1=3$ και ω=4, να βρείτε το άθροισμα των όρων της από τον $7^ο$ μέχρι και τον $20^ο$ και να υπολογίσετε το άθροισμα:
$a_1+a_5+a_9+a_{13}+...+a_{41}$.

5.22 Αν ο ν-οστός όρος μιας ακολουθίας a_ν είναι : $\boldsymbol{a}_\nu=5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\nu+1},\ \ \boldsymbol{\nu}\in\mathbb{N}^*$, να δείξετε ότι αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος. Στη συνέχεια να βρείτε το άθροισμα των 4 πρώτων όρων της.

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

5.23 Να βρείτε το άθροισμα των 6 πρώτων όρων της ακολουθίας με τύπο: $a_v = 5 \cdot 2^{v+2}$.

5.24 Σε μια γεωμετρική πρόοδο ισχύει ότι: $a_4=24$ και $a_7=192$. Να βρείτε το λόγο και τον πρώτο όρο της προόδου και στη συνέχεια να υπολογίσετε το άθροισμα $a_1+a_3+a_5+a_7+\ldots+a_{11}$.

5.25 Να βρείτε γεωμετρική πρόοδο σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

$\boldsymbol{i.}\ \boldsymbol{a}_4 - \boldsymbol{a}_2 = 24\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = 6.$

$\boldsymbol{ii.}\ \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_1 + 5\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \alpha_2 + \alpha_3 = 2\alpha_1 + 40.$

$\boldsymbol{iii.}\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_6 = 576\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{a}_4 = 288.$

$\boldsymbol{iv.}\ \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 14\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \boldsymbol{a}_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 112.$

5.26 Να βρεθεί το άθροισμα των 100 πρώτων όρων της ακολουθίας: 1+α, 2+2α, 4+3α , 8+4α,… .

5.27 Να βρείτε τρεις διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, αν γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των δύο πρώτων είναι 10 και το άθροισμα των δύο τελευταίων είναι 15.

5.28 Δύο πρόοδοι, η πρώτη αριθμητική και η δεύτερη γεωμετρική, έχουν κοινούς τους δύο πρώτους όρους τους. Στην αριθμητική πρόοδο, ο $4^{ος}$ είναι 10 μονάδες μεγαλύτερος του $2^{ου}$ ενώ στη γεωμετρική, η διαφορά $4^{ου}$ και $2^{ου}$ όρου είναι 30 μονάδες. Να βρείτε τις προόδους.

5.29 Να λυθεί η εξίσωση: $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^x=2^{2020}-1$.

5.30 Μεταξύ των αριθμών 31 και 496, να παρεμβάλλετε τρεις όρους ώστε όλοι μαζί να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

5.31 Να βρείτε την τιμή του χ ώστε: $3 \cdot 3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^8 \cdot \ldots \cdot 3^{256} = 81^{x-1}$

5.32 Αν γνωρίζετε ότι η ακολουθία (a_v) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ, να δείξετε ότι και η ακολουθία (β_v) με $\beta_v=a_{3v-2}$, είναι επίσης γεωμετρική πρόοδος.

5.33 Ο πρώτος όρος μιας αριθμητικής προόδου (a_v) είναι 24 και οι a_1, a_5, a_{11} αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Να βρείτε τη διαφορά της αριθμητικής και το λόγο της γεωμετρικής προόδου.

5.34 Σε μια γεωμετρική πρόοδο ισχύει ότι: $\boldsymbol{S}_3 = 168\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \boldsymbol{a}_4 + \boldsymbol{a}_5 + \boldsymbol{a}_6 = 21.$ Να βρείτε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου.

5.35 Να βρείτε τέσσερις διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, αν γνωρίζετε ότι το γινόμενό τους είναι 729 και ο τέταρτος ισούται με το γινόμενο των δύο μεσαίων όρων.

ΚΕΦ. 6° : ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Α. Η έννοια της συνάρτησης

6.1 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

$$f(x)=\frac{\sqrt{2-x}}{x^2+x},\quad g(x)=\frac{x-2}{x^2+|x|-2},\quad h(x)=\sqrt{2-|x|}+\frac{1}{x},\quad s(x)=\frac{\sqrt{|x|-2}}{|x|-3}$$

6.2 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f(x)=\sqrt{\frac{3+x^2}{x-2}},\quad g(x)=\frac{\sqrt{|x|-x}}{x^2-2x+5},\quad h(x)=\frac{\sqrt{3-x}}{x^2-10x+9},\quad s(x)=\sqrt{\frac{1+x}{|x|+x}}.$$

6.3 Δίνονται οι συναρτήσεις f(x), g(x) με τύπους:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1,\ x<-2 \\ x^2-1,\ x>-2 \\ a,\ x=-2 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} x+1,\ x\le 0 \\ x-3,\ x>0 \end{cases}$$

α. Να βρείτε τα: f(-3)+f(5), f(0)+g(0), f(2)-g(4).

β. Να υπολογίσετε το α, αν f(-2)+g(3)=20.

γ. Να γράψετε την παράσταση: $f(x^2)+g(x^2+1)$.

6.4 . Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\frac{2x-1}{x+3}$.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της .
2. Να υπολογίσετε σαν συνάρτηση του χ τις ποσότητες f(2x), f(1-x).
3. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f(2x), f(1-x).
4. Να υπολογίσετε σαν συνάρτηση του χ την ποσότητα: $f(\frac{2x-1}{x+3})$.

Να λύσετε την εξίσωση: $\left(f(\frac{2x-1}{x+3})\right)^2-f(\frac{2x-1}{x+3})-6=0.$

<u>Β. Γραφική παράσταση συνάρτησης</u>

6.5 Να βρείτε – αν υπάρχουν - τα σημεία τομής με τους άξονες των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x)=2x\sqrt{x-2}$ 2. $g(x)=2x\sqrt{9-x^2}$ 3. $h(x)=x^3-x^2-2x$ 4. $k(x)=\frac{x^2+1}{\sqrt{|x|-2}}$

5. $T(x)=\frac{2}{x-|x|}$ 6. $m(x)=\frac{x^2-5}{x^2+2}$

6.6 Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους:

$f(x)=x^2-7x+6$ και $g(x)=2-2x,\ x\in\mathbb{R}.$

α. Να βρείτε – αν υπάρχουν – σημεία τομής τους.

β. Να βρείτε τις τιμές του χ για τις οποίες η C_f είναι κάτω από την C_g .

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

6.7 Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους:

$f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}$ και $g(x)=x^2-4x+2,\ x\in\mathbb{R}.$

α. Να βρείτε – αν υπάρχουν – σημεία τομής τους.

β. Να βρείτε τις τιμές του χ για τις οποίες η C_f είναι κάτω από την C_g .

6.8 Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x)=\sqrt{x^2-2(2a+1)x+(2a+1)^2},\quad a\in\mathbb{R}.$

α. Να δείξετε ότι έχει πεδίο ορισμού όλο το R.

β. Αν γνωρίζετε ότι η γραφική της περνά από τα σημεία Α(1,2) και Β(-1,4), να αποδείξετε ότι α=1.

γ. Για α=1, να βρείτε – αν υπάρχει – σημείο της γραφικής που να βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση y=x.

6.9 Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους:

$f(x)=x^2-(a+1)x$ *και* $g(x)=ax^2-x-1+a,\quad a\in\mathbb{R}.$

α. Να βρείτε τις τιμές του α, ώστε οι γραφικές τους να τέμνονται σε δύο σημεία.

β. Να βρείτε για ποια ακέραια τιμή του α οι συναρτήσεις τέμνονται σε ένα ακριβώς σημείο καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου αυτού.

6.10 Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου k, ώστε σε κάθε περίπτωση η γραφική να διέρχεται από το σημείο που δίνεται για κάθε συνάρτηση:

a. $f(x)=x^3+2k,\ A(-2,10)$ *b.* $f(x)=\sqrt{x^2-k},\ B(-3,2)$ *c.* $f(x)=k\sqrt[3]{x},\ \Gamma(k,16)$

6.11 Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x)=\sqrt{x-2}-\sqrt{2x+a},\quad a\in\mathbb{R}.$

α. Να βρείτε την τιμή του α για την οποία η γραφική της τέμνει τον χχ΄ στο 3 και στη συνέχεια το πεδίο ορισμού της.

β. Να βρείτε το k, ώστε να περνά από το σημείο $B(4,k-\sqrt{7})$.

γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του x, η γραφική της είναι κάτω από τον xx΄.

<u>Γ. Η συνάρτηση f(x)=αx+β</u>

6.12 Να βρείτε τις ευθείες σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Ευθεία με κλίση -2 που περνά από το Α(0,1).

β. Ευθεία παράλληλη της y=3x-1 που περνά από το Β(-1,-2)

γ. Ευθεία που τέμνει τον yy΄ στο 3 και τον χχ΄ στο -6.

6.13 α. Να χαράξετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=|x-2|,\ g(x)=2|x|.$

β. Να βρείτε τα σημεία τομής τους, γραφικά και αλγεβρικά.

γ. Να λύσετε , γραφικά και αλγεβρικά , την ανίσωση f(x)>g(x)

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

6.14 Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x)=\begin{cases}-x+1, & x<0\\ 1, & 0\le x<2\\ x-1, & x\ge 2\end{cases}$

6.15 Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις: $y=(a^2+1)x+2,\ \ y=(2a-3)x-1,\ \ a\in\mathbb{R}$

α. Να δείξετε ότι οι δύο ευθείες δεν μπορεί να είναι παράλληλες.

β. Να βρείτε την τιμή του α, ώστε οι ευθείες να τέμνονται στο σημείο $A(-\frac{1}{4},\frac{3}{4})$

6.16 Σε μια δεξαμενή με συνολική χωρητικότητα 2000lt περιέχονται 400lt νερού. Αρχίζουμε να μεταφέρουμε σε αυτήν νερό, από μια άλλη δεξαμενή που περιέχει 1500lt νερού με παροχή 50lt/min.

α. Αν συμβολίσουμε με t το χρόνο σε λεπτά, να βρείτε τις εξισώσεις που δίνουν την συνολική χωρητικότητα κάθε δεξαμενής ως συνάρτηση του χρόνου.

β. Να βρείτε την χρονική στιγμή κατά την οποία οι δύο δεξαμενές περιέχουν την ίδια ποσότητα νερού.

6.17 Τη χρονική στιγμή t=0, το όχημα Α βρίσκεται στο -5 ενός οριζόντιου άξονα, ενώ το κινητό Β, την ίδια χρονική στιγμή, στο σημείο +7. Το όχημα Α κινείται προς τη θετική φορά με ταχύτητα u=4μ/s ενώ το κινητό Β επίσης προς τη θετική φορά με ταχύτητα v=1μ/s.

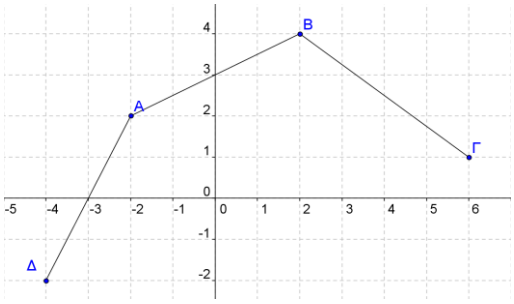
α. Να γράψετε τις εξισώσεις που δίνουν τη θέση χ κάθε κινητού στον άξονα, ως συνάρτηση του χρόνου t.

β. Σε ποια χρονική στιγμή τα δύο κινητά θα βρεθούν στην ίδια θέση και ποια είναι αυτή;

γ. Να κάνετε στο ίδιο σύστημα αξόνων, τις γραφικές παραστάσεις χ-t για το χρονικό διάστημα 0-6sec. Πόσο θα απέχουν τα οχήματα τη χρονική στιγμή t=6sec;

6.18 α. Να αντιστοιχίσετε τις εξισώσεις των ευθειών ΑΔ, ΑΒ και ΒΓ με τις :

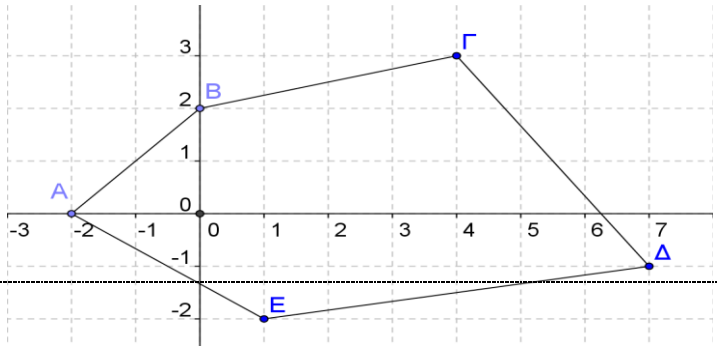
$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{11}{2},\ \ y=2x+6,\ \ y=\frac{1}{2}x+3$$



δικαιολογώντας τους ισχυρισμούς σας.

β. Αν είναι Ο η αρχή των αξόνων, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΔ.

γ. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ΟΒ και ΟΔ. Είναι τα σημεία Β, Ο και Δ συνευθειακά; Δικαιολογήστε!

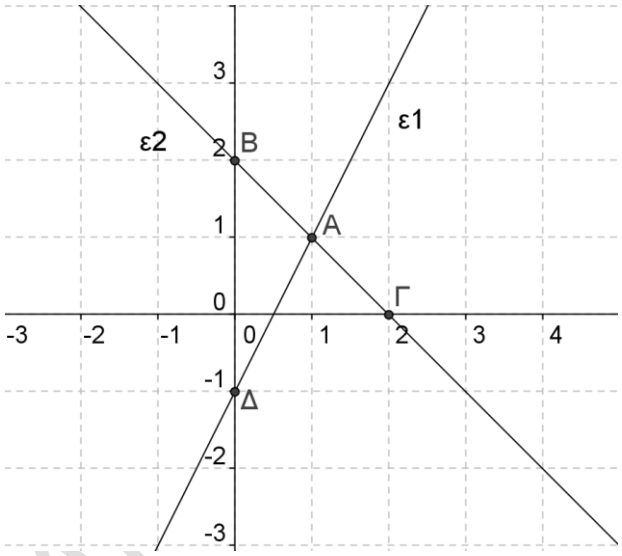


ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

6.19 Στο παρακάτω σχήμα, να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ, Δ και Ε.

2. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ΑΒ , ΒΓ και ΒΔ.
3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυρτού πεντάπλευρου ΑΒΓΔΕ.

6.20 Στο διπλανό σχήμα, έχουμε τις εξισώσεις δύο ευθειών, ε1 και ε2.
α. Να βρείτε τις εξισώσεις των δύο ευθειών.
β. Να βρείτε τις τιμές του χ ώστε:
i. Η ευθεία ε1 να βρίσκεται πάνω από την ε2.
ii. Η ευθεία ΓΔ να βρίσκεται κάτω και από τις δύο ευθείες ε1 και ε2.



ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑ